目　　录

第一章　Banach 空间及其超拓扑

§1.1　Banach 空间

定义 1.1.1　设 X 是某些元素的集合，称 X 为实线性空间，如果它满足：

(1)　X 构成一个加法群，即在 X 上定义了运算"+"，称作加法，使得对任给 $x,y,z,\in X$，有

(a)　$x+y\in X$；

(b)　$x+y=y+x$；

(c)　$x+(y+z)=(x+y)+z$；

(d)　存在 $\theta\in X$，使得任给 $x\in X$，$x+\theta=x$；

(e)　任给 $x\in X$，存在 $-x\in X$，使得 $x-(-x)=\theta$.

(2)　在 R 与 X 之间定义了一种运算 $(\alpha,x)\to\alpha x$，称作数乘，使得对任给 $x,y\in X,\alpha,\beta\in R$，有

(a)　$\alpha x\in X$；

(b)　$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$；

(c)　$1\cdot x=x$；

(d)　$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$；

(e)　$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

定义 1.1.2　设 X 为线性空间，如果定义了 X 上的实值

映射 $\|x\|: X \to R$,使得对任给 $x,y \in X, \alpha \in R$,满足

(1) $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = \theta$;

(2) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

则称 X 为赋范线性空间,$\|x\|$ 称作 x 的范数.

定义 1.1.3 我们假设 X 为某些元素的集合,称实值映射 $d(x,y): X \times X \to R$ 为 X 上的度量(或距离),如果对任给 $x,y,z \in X$,它满足

(1) $d(x,y) \geqslant 0, d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(2) $d(x,y) = d(y,x)$;

(3) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

此时,称(X,d) 为度量空间(或距离空间).

显然,如果在赋范线性空间 X 上定义

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

则它是 X 上的一个度量,而(X,d) 就成为一个度量空间.

定义 1.1.4 设 X 为赋范线性空间,$\{x_n\} \subset X$ 为 X 中点列,$x_0 \in X$,如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$,则称$\{x_n\}$ 依范数收敛(或强收敛)到 x_0,记作 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$(或$(s)x_n \to x_0$).

定义 1.1.5 设(X,d) 为度量空间,$\{x_n\} \subset X$,如果任给 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N,使得 $m,n \geqslant N$ 时,$d(x_m,x_n) < \varepsilon$,则称 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 列,如果 X 中的任意 Cauchy 列都收敛到 X 的某一元素,则称 X 关于 d 完备.

定义 1.1.6 称赋范线性空间 X 为 Banach 空间,如果 X

关于度量 $d(x,y)=\|x-y\|$ 完备.

例 1.1.1 m 维欧氏空间 R^m 在通常的加法与数乘意义下是 Banach 空间，范数定义为

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2},x=(\xi_1,\cdots,\xi_m),\xi_i\in R$$

例 1.1.2 $l^p=\{(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots),\xi_i\in R,\ \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty\}(1\leqslant p<+\infty)$ 是 Banach 空间，范数定义为

$$\|x\|=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p}.$$

例 1.1.3 $L^p[a,b]=\{x:[a,b]\to R,x(t)$ 可测且 $\int_a^b|x(t)|^p dt<\infty\}(1\leqslant p<+\infty)$ 是 Banach 空间，范数定义为

$$\|x(\cdot)\|_p=\sqrt[p]{\int_a^b|x(t)|^p dt}.$$

例 1.1.4 设 (Ω,A,μ) 为测度空间，X 为 Banach 空间，则

$L^p[\Omega,\mathrm{A},\mu,X]=\{x:\Omega\to X,x(w)$ 可测且

$\int_\Omega\|x(w)\|^p d\mu<\infty\}(1\leqslant p<+\infty)$

是 Banach 空间，范数定义为

$$\|x(\cdot)\|_p=\sqrt[p]{\int_\Omega\|x(w)\|^p d\mu}.$$

例 1.1.5 设(Ω, A, μ)是测度空间，X为 Banach 空间，则

$L^{\infty}[\Omega, A, \mu, X] = \{x: \Omega \to X, x(w)$ 可测且本性有界$\}$为 Banach 空间，范数定义作

$$\| x(\cdot) \|_{\infty} = \inf_{E_0} \{ \sup_{w \in E\theta} \| x(w) \|, \mu(E_0) = 0 \}.$$

例 1.1.6 $C_0 = \{\{a_n, n \geqslant 1\} \subset R, \lim a_n = 0\}$为 Banach 空间，范数定义作 $\| x \| = \sup_n |a_n|$.

定义 1.1.7 称 Banach 空间$(X, \|\cdot\|)$是可分的，如果存在可数集$D \subset X$，使得$\overline{D} = X$，即$x \in X$，存在$\{x_n\} \subset D$，使$(s) x_n \to x_0$.

$R^m, l^p (1 \leqslant p < +\infty), L^p[a, b] (1 \leqslant p < \infty)$都是可分的 Banach 空间，$L^{\infty}[\Omega, A; X]$不是可分的 Banach 空间．当$X$是可分的 Banach 空间时，$L^p[\Omega, A; X] (1 \leqslant p < \infty)$是可分的当且仅当$A$是$\mu$可分的（即存在可分的$\sigma$代数$A_0$，使得$A_0 \subset A \subset A_0^{\mu}$，其中$A_0^{\mu}$表示$A_0$对$\mu$的完备化，而$\sigma$代数$A_0$可分是指存在$A_0$的可数子类$\mathbf{C}$，使$\sigma(\mathbf{C}) = A_0$).

定义 1.1.8 设X是一非空集合，$\mathbf{J}$为X的一个子集族，如果$\mathbf{J}$满足下列条件：

(1) $X, \varnothing \in \mathbf{J}$，

(2) $\mathbf{J}$对有限交及任意并运算封闭，

则称$\mathbf{J}$为X的一个拓扑，称$(X, \mathbf{J})$为拓扑空间，称$\mathbf{J}$中的元素为X的开集．

在拓扑空间$(X, \mathbf{J})$中，$U \subset X$称作$x \in X$的邻域，如果存

在 $V \in \mathbf{J}$，使得 $x \in V \subset U$；$x \in X$ 称作 $G \subset X$ 的内点，如果存在 x 的邻域 U，使得 $U \subset G$；子集 G 的内点全体记作 $\operatorname{int} G$. 我们可以证明，G 为开集当且仅当 $G = \operatorname{int} G$. 称 $A \subset X$ 为闭集，如果 $A^c = X \backslash A$ 为 X 中开集．称包含 $A \subset X$ 的所有闭集的交为 A 的闭包，记作 $\operatorname{cl} A$（或 $\overline{A}$）．易知 A 为闭集当且仅当 $A = \operatorname{cl} A$.

定义 1.1.9　设 $(X,\mathbf{J})$ 为拓扑空间，

（1）　称子集族 $\mathbf{J}_0 \subset \mathbf{J}$ 为拓扑 $\mathbf{J}$ 的基，如果任给 $x \in X$ 及 x 的邻域 U，存在 $V \in \mathbf{J}_0$，使得 $x \in V \subset U$；

（2）　称子集族 U_x 为 $x \in X$ 处的局部基，如果任给 $V \in U_x$，V 是 x 的邻域且任给 x 的邻域 U，存在 $V \in U_x$，使得 $x \in V \subset U$；

（3）　称子集族 $\mathbf{P} \subset \mathbf{J}$ 为拓扑 $\mathbf{J}$ 的一个子基，如果 $\mathbf{P}$ 中元素有限交全体构成的集族为 $\mathbf{J}$ 的一个基．

在 Banach 空间 X 中，令

$$S(x_0,r) = \{x \in X, \| x - x_0 \| < r\}$$

$x_0 \in X, r > 0$，称以子集族 $\{S(x_0,r), r > 0\}$ 为局部基的拓扑为范数拓扑或强拓扑，记作 $(X, \| \cdot \|)$ 或 $(X,\mathbf{J})$.

定义 1.1.10　设 X 为一 Banach 空间，称实值映射 $f: X \to R$ 为

（1）　线性泛函，如果任给 $\alpha \in R, x_1, x_2 \in X$，它满足

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

(2) 连续泛函，若$(s)x_n \to x$时，有$f(x_n) \to f(x)$.

(3) 有界泛函，若存在$C > 0$，使任给$x \in X$，有

$$|f(x)| \leqslant C \cdot \|x\|.$$

定义 1.1.11 设X为Banach空间，记X上的有界线性泛函全体为X^*，在X^*上定义加法、数乘及范数如下：

$$(x_1^* + x_2^*)(x) = x_1^*(x) + x_2^*(x)$$

$$(\alpha x^*)(x) = \alpha x^*(x)$$

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|=1} |x^*(x)|$$

$$\alpha \in R, x_1^*, x_2^*, x^* \in X^*$$

则X^*构成一个Banach空间，称作X的共轭空间，如果在等价的意义下有$X = X^*$，称X为自共轭空间. $x^*(x)$也可以记作$< x^*, x >$.

例 1.1.7 R^m为自共轭空间.

证明 我们首先证明$f \in (R^m)^*$当且仅当f具有如下形式：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i \xi_i, \text{任给 } x = (\xi_1, \cdots, \xi_m) \in R^m$$

其中$(\eta_1, \cdots, \eta_m)$为m元有序数组.

“充分性” 若f具有上述形式，则显然是R^m上的线性泛函，又因任给$x \in R^m$，$|f(x)| = |\sum_{i=1}^{m} \eta_i \xi_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2} \|x\|$，故$f$还是有界泛函，所以$f \in (R^m)^*$.

“必要性” 若$f \in (R^m)^*$，令$e_k = (0, \cdots, 1(\text{第}k\text{位}), \cdots,$

$0), \eta k = f(e_k), 1 \leqslant k \leqslant m$,则任给 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_k)$

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i \xi_i$$

由上述结构知在 R^m 与 $(R^m)^*$ 之间存在一一对应 $\varphi: R^m \to (R^m)^*$. φ 显然是线性同构映射,下面我们证明 φ 是保范的.

设 $f \in (R^m)^*$,则

$$\| f \| = \sup_{\| x \| = 1} |f(x)| = \sup_{\| x \| = 1} | \sum_{i=1}^{m} \eta_i \xi_i |$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2}$$

而特别地取

$$x_0 = (\frac{\eta_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2}}, \cdots, \frac{\eta_m}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2}})$$

时,由于 $\| x_0 \| = 1$,故

$$\| f \| = \sup_{\| x \| = 1} |f(x)| \geqslant |f(x_0)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2}$$

于是知 $\| f \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2}$,即 f 在 $(R^m)^*$ 中的范数等于与其对应的 $(\eta_1, \cdots, \eta_m)$ 在 R^m 中的范数,在等价意义下 $(R^m)^* = R^m$,即 R^m 为自共轭空间.

定义 1.1.12 设 X 为 Banach 空间,X^* 为其共轭空间, Banach 空间 X^* 的共轭空间记作 X^{**},称为 X 的二次共轭空间,若 $X = X^{**}$,则称 X 为自反的 Banach 空间.

定义 1.1.13 设 X 为 Banach 空间，称 X 上以

$$\overline{W}(x_0;x_1^*,\cdots,x_n^*,\epsilon) = \{x,|x_i^*(x-x_0)|<\epsilon,1\leqslant i\leqslant n\},x_0\in X$$

为局部基的拓扑为弱拓扑，记作 $\sigma(X,X^*)$，若 $\{x_n\}\subset X$ 在弱拓扑 $\sigma(X,X^*)$ 意义下收敛到 $x\in X$，则称 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x，记作

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n = x \text{ 或} (w)x_0\to x$$

Banach 空间的弱拓扑 $\sigma(X,X^*)$ 及弱收敛有以下性质：

(1) $(w)x_n\to x$ 当且仅当任给 $x^*\in X^*$，

$$x^*(x_n)\to x^*(x).$$

(2) $(s)x_n\to x\Rightarrow(w)x_n\to x$.

(3) $\sigma(X,X^*)\subset \mathbf{J}$，其中 $\mathbf{J}$ 为 X 上的强拓扑.

定义 1.1.14 称共轭空间 X^* 上以

$$\overline{W}(x_0^*,x_1,\cdots,x_n,\epsilon) = \{x^*\in X^*,|(x^*-x_0^*)(x_i)|<\epsilon,1\leqslant i\leqslant n\},$$

$$x_0^*\in X^*$$

为局部基的拓扑为 X^* 上的弱星拓扑，记作 $\sigma(X^*,X)$.

若 $\{x_n^*\}\subseteq X$ 在弱星拓扑 (X^*,X) 意义下收敛到 x^*，则称 $\{x_n^*\}$ 弱星收敛到 x^*，记作 $(w^*)x_n^*\to x^*$.

X^* 上的弱星拓扑及弱星收敛有以下性质：

(1) $(w^*)x_n^*\to x^*$ 当且仅当任给 $x\in X$，$x_n^*(x)\to x^*(x)$.

(2) $\sigma(X^*,X)\subset\sigma(X^*,X^{**})$.

例 1.1.8 $(L^1[\Omega,\mathbf{A},\mu;X])^* = L^\infty[\Omega,\mathbf{A},\mu;X^*_w.]$

$(L^p[a,b])^* = L^q[a,b]$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 1<p<\infty$.

设X为Banach空间，称子集$A\subset X$是均衡的，如果$|\lambda|\leqslant 1$时，必有$\lambda A\subset A$.

定义 1.1.15 称共轭空间X^*上以

$$
\begin{aligned}
&\overline{W}(x_0^*,A_1,\cdots,A_n,\varepsilon)\\
&=\{x^*\in X^*,|(P_{A_i}(x^*)-P_{A_i}(x_0^*)|\\
&<\varepsilon, A_i \text{ 为 } X \text{ 的均衡弱紧凸集}\}\\
&P_A(x^*)=\sup\{<x^*,x>,x\in A\}
\end{aligned}
$$

为局部基的拓扑为Mackey 拓扑，记作$m(X^*,X)$.

由 Banach 空间理论，Mackey 拓扑就是在X的一切均衡弱紧凸集上一致收敛的拓扑，并且X^*上存在着 Mackey 拓扑意义下的可数稠密子集.

定义 1.1.16 称共轭空间X^*上以

$$
\begin{aligned}
&\overline{W}(x_0^*,A_1,\cdots,A_n,\varepsilon)\\
&=\{x^*\in X^*,|P_{A_i}(x_n)-P_{A_i}(x_0^*)|\\
&<\varepsilon, A_i \text{ 为 } X \text{ 的紧集}\}
\end{aligned}
$$

为局部基的拓扑为有界弱*拓扑(bw^*拓扑).

可知bw^*拓扑就是在X的紧集上一致收敛的拓扑，并且$A\subset X^*$是bw^*闭的当且仅当任给X^*中范有界子集B，$A\cap B$是w^*闭的.

§ 1.2 Banach 空间上的超空间

从本节开始，我们讨论 Banach 空间上的超空间（即子集族空间）的结构. 在本书中，除非特别声明，我们恒设$(X, \|\cdot\|)$为 Banach 空间，记

$\mathbf{P}_0(X) = \{A \subseteq X, A$ 为非空子集$\}$.

$\mathbf{P}_{(b)f(c)}(X) = \{A \subseteq X, A$ 为非空（有界）闭（凸）子集$\}$.

$\mathbf{P}_{(w)k(c)}(X) = \{A \subseteq X, A$ 为非空（弱）紧（凸）子集$\}$.

$\mathbf{P}_{l(w)k(c)}(X) = \{A \subseteq X, A \cap \bar{S}(0,r) \in \mathbf{P}_{(w)k(c)}(X), r > 0\}$.

定义 1.2.1 在 $\mathbf{P}_0(X)$ 上定义加法、数乘为

$$A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}$$

$$\alpha A = \{\alpha x, x \in A\}$$

定理 1.2.1 $\mathbf{P}_0(X)$ 上的加法、数乘运算满足下列性质：

(1) $A + B = B + A$;

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(3) $A + \{0\} = A$;

(4) $1 \cdot A = A, 0 \cdot A = \{0\}$;

(5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

(6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

但是在上述加法与数乘运算下，$\mathbf{P}_0(X)$ 不是线性空间. 事实上它不满足定义 1.1.1 中的(1)，(e) 及(2)，(d).

定义 1.2.2 设 $A \in \mathbf{P}_0(X)$，定义

$$\|A\| = \sup\{\|x\|, x \in A\}$$

定理 1.2.2 设 $A, B \in \mathbf{P}_0(X)$，$\alpha \in R$，则有

(1) $\|A\| \geqslant 0$，$\|A\| = 0$ 当且仅当 $A = \{0\}$；

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$；

(3) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$；

证明 依 $\mathbf{P}_0(X)$ 上加法与数乘的定义及 X 上范数的性质易证.

定义 1.2.3 设 $x \in X$，$A, B \in \mathbf{P}_0(X)$，称

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

为 x 到 A 的距离，定义

$$\delta_u(A, B) = \sup_{y \in B} d(y, A)$$

$$\delta_l(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$$

$$\delta(A, B) = \max\{\delta_u(A, B), \delta_l(A, B)\}$$

称 $\delta_u(A, B)$ 为 A, B 间的上半 Hausdorff 距离，$\delta_l(A, B)$ 为 A，B 间的下半 Hausdorff 距离，$\delta(A, B)$ 为 A, B 间的 Hausdorff 距离.

定理 1.2.3 设 $A \in \mathbf{P}_f(X)$，则 $d(x, A)$ 是 x 的连续函数，且

$$A = \{x, d(x, A) = 0\},$$

$$A \subset B \text{ 当且仅当 } d(x, B) \leqslant d(x, A), x \in X.$$

证明 设 $x, y \in X$，任取 $z \in A$，有

$$\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$$

$$\|y - z\| \leqslant \|y - x\| + \|x - z\|$$

由 z 的任意性及定义 1.2.3 即得

$$d(x,A) - d(y,A) \leqslant d(x,y)$$

$$d(y,A) - d(x,A) \leqslant d(x,y)$$

于是 $|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant \| x - y \|$，所以 $d(x,A)$ 是 x 的连续函数，因为 $A \in \mathbf{P}_f(X)$，所以 $A = \{x, d(x,A) = 0\}$ 是显然的

下面证明 $A \subset B$ 当且仅当 $d(x,B) \leqslant d(x,A), x \in X$.

“必要性”依定义显然.

“充分性”假设存在 $x \in A, x \notin B$，则

$$d(x,A) = 0, d(x,B) > 0$$

但这与 $x \in X, d(x,B) \leqslant d(x,A)$ 矛盾，故 $A \subset B$.

定理 1.2.4 $\delta(A,B)$ 为 $\mathbf{P}_f(X)$ 上的度量，且 $\delta(A,\{0\}) = \| A \|$.

证明 (1) 任给 $A,B \in \mathbf{P}_f(X)$，$\delta(A,B) \geqslant 0$ 是显然的. 依定理 1.2.3 即可证 $\delta(A,B) = 0$ 当且仅当 $A = B$.

(2) $\delta(A,B) = \delta(B,A)$ 是显然的.

(3) 设 $A,B,C \in \mathbf{P}_f(X)$，任给 $x \in A, y \in B, z \in C$ 有

$$\| x - y \| \leqslant \| x - z \| + \| z - y \|, \tag{1.2.1}$$

在(1.2.1)式两边先对 $y \in B$ 取下确界，再对 $z \in C$ 取下确界可得

$$d(x,B) \leqslant d(x,C) + \inf_{z \in C} d(z,B) \tag{1.2.2}$$

考虑到 $\inf\limits_{z \in C} d(z,B) \leqslant \sup\limits_{z \in C} d(z,B)$，在(1.2.2)式两边对 $x \in A$

取上确界，则

$$\sup_{x\in A} d(x,B) \leqslant \sup_{x\in A} d(x,C), + \sup_{z\in C} d(z,B) \quad (1.2.3)$$

同理可证

$$\sup_{y\in B} d(y,A) \leqslant \sup_{y\in B} d(y,C), + \sup_{z\in C} d(z,A) \quad (1.2.4)$$

依(1.2.3)、(1.2.4) 式及 $\delta(A,B)$ 的定义即得

$$\delta(A,B) \leqslant \delta(A,C) + \delta(C,B).$$

综合(1)，(2)，(3) 知 $\delta(A,B)$ 为 $\mathbf{P}_f(X)$ 上的度量，而 $\delta(A,\{0\}) = \|A\|$ 是显然的.

［注］ 由定理 1.2.4 的证明易见 $\delta_u(A,B)$、$\delta_l(A,B)$ 均为 $\mathbf{P}_f(X)$ 上的半度量，即满足定义 1.1.3 中的(3) 以及(1) 的前半部分.

定理 1.2.5 设 $A,B \in \mathbf{P}_f(X)$，则

(1) $\delta(A,B) = \max\{\inf\{\lambda, B \subset \lambda + A\}, \inf\{\lambda, A \subset \lambda + B\}\}$，其中

$$\lambda + A = \mathrm{cl}(A + S(0,\lambda)) = \{x, d(x,A) \leqslant \lambda\}$$

(2) $\delta(A,B) = \sup_{x\in X} |d(x,A) - d(x,B)|$.

证明 (1) 依定义 1.2.3，对于任给 $x \in A$，有 $d(x,B) \leqslant \sup_{x\in A} d(x,B)$，于是由 $\lambda + B$ 的意义，对于任意 $\varepsilon > 0$，有

$$A \subset (\varepsilon + \sup_{x\in A} d(x,B)) + B$$

从而得

$$\inf\{\lambda, A \subset \lambda + B\} \leqslant \sup_{x\in A} d(x,B) + \varepsilon$$

由 ε 的任意性即得 $\inf\{\lambda, A \subset \lambda + B\} \leqslant \sup_{x\in A} d(x,B)$ (1.2.5)

另一方面，对于任给 $\varepsilon > 0$，必存在 $x_0 \in A$，使得

$$\sup_{x\in A} d(x,B) \leqslant d(x_0,B) + \varepsilon$$

但由于 $A \subset \lambda + B$ 时，必有 $d(x_0,B) < \lambda$，从而得到

$$\sup_{x\in A} d(x,B) \leqslant \lambda + \varepsilon$$

依 λ,ε 的任意性可得

$$\inf\{\lambda, A \subset \lambda + B\} \geqslant \sup_{x\in A} d(x,B) \tag{1.2.6}$$

综合(1.2.5)，(1.2.6) 即得 $\inf\{\lambda, A \subset \lambda + B\} = \sup_{y\in B} d(x,B)$，同理可证

$$\inf\{\lambda, B \subset \lambda + A\} = \sup_{y\in B} d(y,A)$$

于是有

$$\delta(A,B) = \max\{\inf\{\lambda, B \subset \lambda + A\}, \inf\{\lambda, A \subset \lambda + B\}\}.$$

(2) 由于 $x \in A$ 时有 $d(x,A) = 0$，故

$$\begin{aligned}\sup_{x\in A} d(x,B) &= \sup_{x\in A}(d(x,B) - d(x,A)) \\ &\leqslant \sup_{x\in X}(d(x,B) - d(x,A)) \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

对于任给 $x \in X, y \in B, z \in A$，有

$$\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$$

在上式中对 $y \in B$ 取下确界，得

$$\begin{aligned} d(x,B) &\leqslant \|x - z\| + d(z,B) \\ &\leqslant \|x - z\| + \sup_{x\in A} d(x,B) \end{aligned}$$

再对 $z \in A$ 取下确界，得

$$d(x,B) - d(x,A) \leqslant \sup_{x\in A} d(x,B)$$

依 $x \in X$ 的任意性，有

$$\sup_{x\in X}(d(x,B) - d(x,A)) \leqslant \sup_{x\in A} d(x,B) \quad (1.2.8)$$

于是由(1.2.7),(1.2.8) 式可得

$$\sup_{x\in A} d(x,B) = \sup_{x\in X}(d(x,B) - d(x,A))$$

同理可证$\sup_{x\in B} d(x,A) = \sup_{x\in X}(d(x,A) - d(x,B))$,故

$$\delta(A,B) = \sup_{x\in X}|d(x,A) - d(x,B)|.$$

［注］ 在定理 1.2.5 中,我们实际上证明了

$$\delta_u(A,B) = \inf\{\lambda, B \subset \lambda + A\}$$
$$= \sup_{x\in X}\{d(x,A) - d(x,B)\}$$

及

$$\delta_l(A,B) = \inf\{\lambda, A \subset \lambda + B\}$$
$$= \sup_{x\in X}\{d(x,B) - d(x,A)\}$$

定理 1.2.6 设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_f(X)$,$A \in \mathbf{P}_f(X)$ 且 $\delta(A_n,A) \to 0, n \to \infty$,则

$$A = \bigcap_{n\geqslant 1} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} A_m} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{m\geqslant n} (\varepsilon + A_n). \quad (1.2.9)$$

证明 首先对于任意非空子集列$\{A_n\}$有

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{m\geqslant n} (\varepsilon + A_m) \subset \bigcap_{n\geqslant 1} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} A_m} \quad (1.2.10)$$

由于$\lim_{n\to\infty}\delta(A_n,A) = 0$,故依定理 1.2.5.(1) 知对于任意给定的$\varepsilon > 0$,存在$n(\varepsilon)$,使$m \geqslant n(\varepsilon)$时有$A \subset \varepsilon + A_m$,$A_m \subset \varepsilon + A$. 由$A \subset \varepsilon + A_m (m \geqslant n(\varepsilon))$得$A \subset \bigcup_{n\geqslant 1} \overline{\bigcap_{m\geqslant n} (\varepsilon + A_m)}$,从而依$\varepsilon$的任意性有

$$A \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{m\geqslant n} (\varepsilon + A_m) \quad (1.2.11)$$

由$A_m \subset \varepsilon + A (m \geqslant n(\varepsilon))$得$\bigcup_{m\geqslant n(\varepsilon)} A_m \subset \varepsilon + A$,从而$\overline{\bigcup_{m\geqslant n(\varepsilon)} A_m}$

$\subset 2\varepsilon + A$，故

$$\bigcap_{n\geqslant 1} \overline{\bigcap_{m\geqslant n} A_m} \subset 2\varepsilon + A$$

依 ε 的任意性知

$$\bigcap_{n\geqslant 1} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} A_m} \subset A \qquad (1.2.12)$$

综合(1.2.10)—(1.2.12) 式，即证(1.2.9) 式成立．

定理 1.2.7 度量空间$(\mathbf{P}_f(X),\delta)$ 是完备的．

证明 仅需证明对于 $\mathbf{P}_f(X)$ 中任意 Cauchy 列$\{A_n\}$，存在 $A \in \mathbf{P}_f(X)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\delta(A_n,A) = 0$.

令 $A = \bigcap\limits_{n\geqslant 1}\overline{\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m}$，显然 $A \in \mathbf{P}_f(X)$，下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}\delta(A_n,A) = 0$.

任给 $\varepsilon > 0$，依Cauchy 准则，对于任意自然数 k，存在自然数 N_k，使得 $m,n \geqslant N_k$ 时，

$$\delta(A_m,A_n) < \frac{\varepsilon}{2^k} \qquad (1.2.13)$$

特别地，存在 N_0，使 $m,n \geqslant N_0$ 时，

$$\delta(A_n,A_m) < \varepsilon \qquad (1.2.14)$$

首先，对于任意固定的 $n_0 \geqslant N_0$ 及任意 $x_0 \in A_{n0}$，依(1.2.13) 总可找到 $n_1 > \max\{N_1,n_0\}$ 及 $x_1 \in A_{n1}$ 使得 $d(x_0,x_1) < \delta(A_{n0},A_{n1}) < \varepsilon$，而对于 $x_1 \in A_{n1}$，$n_1 > N_1$，又可找到 $n_2 > \max\{N_2,n_1\}$，且使得$d(x_1,x_2) < \delta(A_{n1},A_{n2}) < \frac{\varepsilon}{2}$，…，如此下去得 X 中点列$\{x_k\}$ 满足 $d(x_k,x_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$，$k \geqslant 1$，它显然是 X 中的 Cauchy 点列．依 Banach 空间 X 的完备性知存在 $x \in$

X,使得$(s)x_n \to x$. 由于$x_k \in A_{nk}$而$\{n_k\}$严格单调增,故

$$x \in \bigcap_{n \geqslant 1} \overline{\bigcup_{m \geqslant n} A_m} = A,$$

且

$$d(x_0, A) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} d(x_k, x_{k+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = 2\varepsilon$$

根据$x_0 \in A_{n0}$的任意性,有$\sup\limits_{x \in A_{n_0}} d(x, A) \leqslant 2\varepsilon$. 这样我们就证明了对于任给$\varepsilon > 0$,当$n \geqslant N_0$时,

$$\sup_{x \in A_n} d(x, A) \leqslant 2\varepsilon \qquad (1.2.15)$$

另一方面,对于任意$x \in A$,由于$x \in \overline{\bigcup_{m \geqslant N_0} A_m}$,故存在$n' > N_0$,$y \in A_{n'}$,使得$d(x,y) \leqslant \varepsilon$,即$d(x, A_{n'}) \leqslant \varepsilon$,于是依(1.2.14),对于任给$n > N_0$及$x \in A$,$d(x, A_n) \leqslant d(x, A_{n'}) + \delta(A_{n'}, A_n) \leqslant 2\varepsilon$. 依$x \in A$的任意性,知对于任给$\varepsilon > 0$,当$n > N_0$时,

$$\sup_{x \in A} d(x, A_n) \leqslant 2\varepsilon \qquad (1.2.16)$$

综合(1.2.15)及(1.2.16)得任给$\varepsilon > 0$,存在N,使$n > N$时,

$$\delta(A_n, A) = \max\{\sup_{x \in A_n} d(x, A), \sup_{x \in A} d(x, A_n)\} \leqslant 2\varepsilon$$

即$\lim\limits_{n \to \infty} \delta(A_n, A) = 0$.

定理 1.2.8 $(\mathbf{P}_{fc}(X), \delta)$是完备的度量空间.

证明 由于$\mathbf{P}_{fc}(X) \subset \mathbf{P}_f(X)$,且$\mathbf{P}_f(X), \delta)$是完备的,所

以我们仅需证明 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 是$(\mathbf{P}_f(X),\delta)$ 中的闭集即可.

设$\{A_n\}\subset \mathbf{P}_{fc}(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(A_n,A)=0$, 则 $A\in \mathbf{P}_f(X)$. 任给 $x,y\in A$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 令 $z=\lambda x+1(1-\lambda)y$, 易证任给 $n\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned} d(z,A_n) &\leqslant \lambda d(x,A_n)+(1-\lambda)d(y,A_n) \\ &\leqslant \sup_{x\in A} d(x,A_n) \end{aligned}$$

因而可知, 任给 $n\geqslant 1$ 有

$$\sup_{x\in A\cup\{z\}} d(x,A_n)\leqslant \sup_{x\in A} d(x,A_n) \tag{1.2.17}$$

由于 $A\subset\cup\{z\}$, 依定理 1.2.3, 对于 $n\geqslant 1$ 有

$$\sup_{x\in A_n} d(x,A\cup\{z\})\leqslant \sup_{x\in A_n} d(x,A) \tag{1.2.18}$$

于是由(1.2.17)、(1.2.18)知$\lim\limits_{n\to\infty}\delta(A_n,A\cup\{z\})=0$, 故 $A\cup\{z\}=A$, 即 $z\in A$. 所以 $A\in \mathbf{P}_{fc}(X)$.

定理 1.2.9 $(\mathbf{P}_{bf}(X),\delta)$ 是完备的度量空间.

证明 如果子集列$\{A_n\}\subset \mathbf{P}_{bf}(X)$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty}\delta(A_n,A)=0$, $A\in \mathbf{P}_f(X)$, 取 $\varepsilon=\varepsilon_0$, 则存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时有 $A\subset A_n+\varepsilon_0$, 而 $A_n+\varepsilon_0$ 是有界集, 故 $A\in \mathbf{P}_{bf}(X)$. 于是 $\mathbf{P}_{bf}(X)$ 为$(\mathbf{P}_f(X),\delta)$ 的闭集, 从而它是完备的.

定理 1.2.10 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 是完备的度量空间.

证明 设$\{A_n\}\subset \mathbf{P}_k(X)$, 且 $\delta(A_n,A)\to 0$, $n\to\infty$, 则

$$A\in \mathbf{P}_f(X).$$

任给 $\varepsilon>0$, 由于存在 N_0, 当 $n\geqslant N_0$ 时, $\delta(A,A_n)<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 特别地有 $A\subset\dfrac{\varepsilon}{2}+A_{N0}$, 但 A_{N0} 是紧集, 所以存在有限子集 F, 使得

$A_{N_0} \subset \frac{\varepsilon}{2} + F$，从而 $A \subset F + \varepsilon$，即 A 是完全有界的，故 $A \in \mathbf{P}_k(X)$. 于是，定理得证.

定理 1.2.11 $(\mathbf{P}_{kc}(X), \delta)$ 是完备的度量空间.

证明 综合定理 1.2.8，定理 1.2.10 易证.

定理 1.2.12 $(\mathbf{P}_{wkc}(X), \delta)$ 是完备度量空间.

证明 仅需证明对于任意 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{wkc}(X)$，

$$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n, A) = 0, A \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$$

必有 $A \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$. 为此，将 X 看作 X^{**} 的子集，则 $\{A_n\}$ 可看作 X^{**} 中的 $\sigma(X^{**}, X^*)$ 一紧凸集列，并且 A 在以下拓扑 $\sigma(X^{**}, X^*)$ 的意义下的闭包 $\overline{A}$ 也是 $\sigma(X^{**}, X^*)$ 一紧的，由于 $A \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，从而 A 是弱闭的，故仅需证明 $\overline{A} \subset X$ 即可，对于任给 $\varepsilon > 0$，依假设存在 $n(\varepsilon)$，使得 $A \subset A_{n(\varepsilon)} + \varepsilon\overline{S}(0,1)$. 记 S^{**} 为 X^{**} 中的闭单位球，由于 $A_{n(\varepsilon)}, S^{**}$ 均为 $\sigma(X^{**}, X^*)$ 一紧的，故知 $A_{n(\varepsilon)} + \varepsilon S^{**}$ 及 $\sigma(x^{**}, x^*)$ 闭的，从而 $\overline{A} \subset A_{n(\varepsilon)} + \varepsilon S^{**}$，于是 $\overline{A} \subset X + \varepsilon S^{**}$. 由于 X 是 X^{**} 的强闭子集，而 $\varepsilon > 0$ 是任意的，因此有 $\overline{A} \subset X$，定理得证.

正如本节开始所指出的，$\mathbf{P}_0(X)$ 在定义 1.2.1 的加法与数乘运算下不能构成线性空间. 但下面的定理说明，在一定限制下，可以将超空间看作某一 Banach 空间的闭凸锥，从而为某些集值问题的研究提供了方便.

记 $\mathbf{D}$ 为 $\mathbf{P}_{kc}(X)$ 上有序对全体，即

$$\mathbf{D} = \{\langle A, B \rangle, A, B \in \mathbf{P}_{kc}(X)\}$$

在 $\mathbf{D}$ 上定义等价关系"～"如下：

$$<A,B>\sim<C,D> \text{ 当且仅当 } A+D=B+C$$

仍用 **D** 表示在等价关系“$\sim$”下的商空间，用 $<A,B>$ 表示 **D** 中所有与它等价的元素.

定理 1.2.13 在 **D** 中定义加法、数乘及范数如下：

(1) $<A,B>+<C,D>=<A+C,B+D>$,

(2) $\alpha\cdot<A,B>=\begin{cases}<\alpha A,\alpha B>, & \alpha\geqslant 0,\\ <|\alpha|B,|\alpha|A>, & \alpha<0,\end{cases}$

(3) $\|<A,B>\|=\delta(A,B)$,

则 **D** 为一赋范线性空间.

证明 首先容易证明 **D** 为一线性空间，零元素为等价类

$$\{<D,D>,D\in\mathbf{P}_{kc}(X)\}$$

下面证明 **D** 为赋范空间.

(1) $\|<A,B>\|\geqslant 0$ 是显然的，且依 Hausdorff 度量的性质知 $\|<A,B>\|=0$ 当且仅当 $A=B$，即 $\langle A,B\rangle$ 为 **D** 的零元素.

(2) 对于任意 $A,B,C,D\in\mathbf{P}_{kc}(X)$，可以证明（§1.4）

$$\delta(A+C,B+D)\leqslant\delta(A,B)+\delta(C,D)$$

所以有

$$\begin{aligned}\|<A,B>+<C,D>\|&=\|<A+C,B+D>\|\\&=\delta(A+C,B+D)\\&\leqslant\delta(A,B)+\delta(C,D)\\&=\|<A,B>\|+\|<C,D>\|.\end{aligned}$$

(3) 由数乘的定义易证

$$\|\alpha\cdot<A,B>\|=|\alpha|\cdot\|<A,B>\|.$$

综上所述 $\mathbf{D}$ 为赋范线性空间.

定理 1.2.14 设 $\bar{\mathbf{D}}$ 为 $\mathbf{D}$ 关于范数的完备化构成的 Banach 空间，记 $\mathbf{D}_0 = \{< A,\theta >, A \in \mathbf{P}_{kc}(X)\}$，则 $\mathbf{D}_0$ 为 $\bar{\mathbf{D}}$ 的闭凸锥，且存在 $\mathbf{P}_{kc}(X)$ 到 $\mathbf{D}_0$ 的映射 $j:\mathbf{P}_{kc}(X) \to \mathbf{D}_0$，定义为

$$j(A) = < A,\theta >, A \in \mathbf{P}_{kc}(X)$$

满足

(1) $j:\mathbf{P}_{kc}(X) \to \mathbf{D}_0$ 是一一的映上的；

(2) 任给 $A,B \in \mathbf{P}_{kc}(X)$，$j(A+B) = j(A) + j(B)$；

(3) 任给 $A \in \mathbf{P}_{kc}(X)$，$\lambda \geqslant 0$，$j(\lambda A) = \lambda j(A)$；

(4) $j:\mathbf{P}_{kc}(X) \to \mathbf{D}_0$ 是同胚映射.

证明 显然 $\mathbf{D}_0$ 为 $\bar{\mathbf{D}}$ 的凸锥，假设 $\{< A_n,\theta >, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{D}_0$，且在 $\bar{\mathbf{D}}$ 中收敛，则 $\{< A_n,\theta >, n \geqslant 1\}$ 为 $\bar{\mathbf{D}}$ 中 Cauchy 列，而由于

$$\begin{aligned}\delta(A_n,A_m) &= \| < A_n,A_m > \| \\ &= \| < A_n,\theta > - < A_m,\theta > \|\end{aligned}$$

所以 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{P}_{kc}(X)$ 中 Cauchy 列，故存在 $A \in \mathbf{P}_{kc}(X)$，使得：

$$\delta(A_n,A) \to 0$$

因而 $\| < A_n,\theta > - < A,\theta > \| \to 0$ 且 $< A,\theta > \in \mathbf{D}_0$，即证 $\mathbf{D}_0$ 为 $\bar{\mathbf{D}}$ 中闭凸锥.

由定义易证 $j:\mathbf{P}_{kc}(X) \to \mathbf{D}_0$ 满足(1)，(2)，(3). 而由于

$$\begin{aligned}\| j(A) - j(B) \| &= \| < A,\theta > - < B,\theta > \| \\ &= \| < A,B > \| = \delta(A,B)\end{aligned}$$

所以 $j:\mathbf{P}_{kc}(X)\to\mathbf{D}_0$ 为同胚映射.

[注] 对于自反 Banach 空间,也存在由 $\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 到 $\bar{\mathbf{D}}$ 的嵌入映射.

§1.3 超空间上的拓扑

本节研究超空间上的拓扑结构,为了一般性起见,我们假设 $(X,\mathbf{J})$ 为任意拓扑空间. 记 $\mathbf{P}(X)$ 为 X 的幂集,对于任意 $B\in\mathbf{P}(X)$,记

$$I^*(B)=\{A\in\mathbf{P}_0(X),A\subset B\}$$

$$I_*(B)=\{A\in\mathbf{P}_0(X),A\cap B\neq\varnothing\}$$

$$\mathbf{J}^*=\{I^*(G),G\in\mathbf{J}\}$$

$$\mathbf{J}_*=\{I_*(G),G\in\mathbf{J}\}$$

容易证明上述概念 $I^*(\cdot)$ 及 $I_*(\cdot)$ 具有如下性质:

(1) $I^*(B)\subset I_*(B)$;

(2) $(I^*(B))^c=\mathbf{P}_0(X)\backslash I^*(B)=I_*(B^c)$

$(I_*(B))^c=\mathbf{P}_0(X)\backslash I_*(B)=I^*(B^c)$;

(3) 若 $B_1\subset B_2\in\mathbf{P}(X)$,则

$I^*(B_1)\subset I^*(B_2)$ 且 $I_*(B_1)\subset I_*(B_2)$;

(4) 任给 $B_1,B_2\in\mathbf{P}(X)$,有

$$I^*(B_1)\cup I^*(B_2)\subset I^*(B_1\cup B_2)$$

$$I_*(B_1)\cap I_*(B_2)\supset I_*(B_1\cap B_2);$$

(5) $\mathbf{J}^*$ 对交运算封闭,$\mathbf{J}_*$ 对并运算封闭,即任给 G_1,G_2

$\in \mathbf{J}$，有

$$I^*(G_1)\cap I^*(G_2)=I^*(G_1\cap G_2)$$

$$I_*(G_1)\cup I_*(G_2)=I_*(G_1\cup G_2).$$

定义 1.3.1 称以 $\mathbf{J}^*$ 为基的拓扑为超空间 $\mathbf{P}_0(X)$ 上的上拓扑(upper topology)，记作 $\mathbf{J}_u$. 称以 $\mathbf{J}_*$ 为子基的拓扑为超空间 $\mathbf{P}_0(X)$ 上的下拓扑(lower topology)，，记作 $\mathbf{J}_l$. 称以 $\{\mathbf{J}^*,\mathbf{J}_*\}$ 为子基的拓扑为超空间 $\mathbf{P}_0(X)$ 上的 Vietoris 拓扑，记作 $\mathbf{J}_v$.

［注 1］ 可以直接验证，$\mathbf{J}^*$，$\mathbf{J}_*$ 及 $\{\mathbf{J}^*,\mathbf{J}_*\}$ 确实为 $\mathbf{P}_0(X)$ 上某一拓扑的基或子基.

［注 2］ 对于任给 $G_1,\cdots,G_n$，记

$$I(G_1,\cdots,G_n)$$

$$=\{A\in \mathbf{P}_0(X),A\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_i,A\cap G_i\neq\varnothing(1\leqslant i\leqslant n)\}$$

则由于有

$$I(G_1,\cdots,G_n)=I_*(G_1)\cap\cdots\cap I_*(G_n)\cap I^*(\bigcup_{i=1}^{n}G_i)$$

$$I^*(G)=I(G),I_*(G)=I(X,G)$$

所以 $\mathbf{P}_0(X)$ 上的集族

$$\{\mathbf{B}=I(G_1,\cdots,G_n),G_i\in \mathbf{J}(1\leqslant i\leqslant n),n\geqslant 1\}$$

是 Vietoris 拓扑 $\mathbf{J}_v$ 的子基.

［注 3］ 有时需要考虑 $\mathbf{P}_0(X)$ 的某一子空间(如 $\mathbf{P}_f^*(X)$、$\mathbf{P}_k(X)$ 等等)上的拓扑，我们仍用 $\mathbf{J}_u$，$\mathbf{J}_l$ 及 $\mathbf{J}_v$ 分别表示这些子空间上的相对拓扑.

下面我们讨论超空间上的拓扑与其基本拓扑空间的关系.

定理 1.3.1 设 $i: X \to \mathbf{P}_0(X)$ 是 X 到 $\mathbf{P}_0(X)$ 上的映射，定义作 $i(x) = \{x\}$, $\forall x \in X$,则 i 在 $\mathbf{J}_u$,$\mathbf{J}_l$ 及 $\mathbf{J}_v$ 三种拓扑意义下均为连续映射.

证明 若 $G \in \mathbf{J}$,则

$$\begin{aligned} & i^{-1}(I^*(G)) \\ & = \{x, i(x) \in I^*(G)\} \\ & = \{x, \{x\} \subset G\} = G \end{aligned}$$

类似地,若 $G_1, \cdots, G_n \in \mathbf{J}$,则

$$\begin{aligned} & i^{-1}(I_*(G_1) \cap \cdots \cap I_*(G_n)) = \{x, i(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} I_*(G_i)\} \\ & = \{x, \{x\} \cap G_i \neq \varnothing (1 \leqslant i \leqslant n)\} \\ & = \{x, x \in G_i, (1 \leqslant i \leqslant n)\} \\ & = \bigcap_{i=1}^{n} G_i \end{aligned}$$

所以 i 在 $\mathbf{J}_u$,$\mathbf{J}_l$ 拓扑下连续. 由定义 1.3.1 的注 2 知 i 在 $\mathbf{J}_v$ 拓扑下也连续.

定理 1.3.2 设$(X,\mathbf{J})$ 为拓扑空间,用 $\mathbf{U}$ 表示 X 的有限子集的全体,则稠密于$(\mathbf{P}_0(X), \mathbf{J}_v)$.

证明 设 G 为非空开集,则 G 一定包含有限子集,从而知 $I^*(G) \cap \mathbf{U} \neq \varnothing$ 类似地,若 $G_1, \cdots, G_n$ 为非空开集,取 $x_i \in G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$,则

$$\{x_1, \cdots, x_n\} \in I_*(G_1) \cap \cdots \cap I_*(G_n) \cap \mathbf{U}$$

于是知$\mathbf{U}$与$\mathbf{J}_v$的子基$\{\mathbf{J}^*,\mathbf{J}_*\}$中任一元素相交，故$\mathbf{U}$稠密于$(\mathbf{P}_0(X),\mathbf{J}_v)$.

定理 1.3.3 若$(X,\mathbf{J})$是可分的，则$(\mathbf{P}_0(X),\mathbf{J}_v)$也是可分的.

证明 取X的稠密可数子集$D=\{x_n,n\geqslant 1\}$，用$\mathbf{U}_D$表示D的有限子集的全体，则$\mathbf{U}_D$是可数的. 由于D稠密于X，所以D与X中任一开集相交非空，从而类似于定理1.3.2可证$\mathbf{U}_D$稠密于$(\mathbf{P}_0(X),\mathbf{J}_v)$，则知$(\mathbf{P}_0(X),\mathbf{J}_v)$是可分的.

定理 1.3.4 设$(X,\mathbf{J})$是T_1拓扑空间，则$(\mathbf{P}_0(X),\mathbf{J}_v)$是$T_0$空间.

证明 设A,B为$\mathbf{P}_0(X)$中两个不同元素，则$A\backslash B$与$B\backslash A$必有一个非空，不妨设$A\backslash B\neq\varnothing$. 若$x\in A\backslash B$，由于$(X,\mathbf{J})$是$T_1$空间，故$G_x=X\backslash\{x\}$为开集，从而$I^*(G_x)$为$\mathbf{P}_0(X),\mathbf{J}_v)$的开集，但显然$B\in I^*(G_x)$，$A\notin I^*(G_x)$，故$\mathbf{P}_0(X),\mathbf{J}_v)$为$T_0$空间.

定理 1.3.5 设$(X,\mathbf{J})$是任意拓扑空间，则$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$是$T_0$空间.

证明 设A,B为$\mathbf{P}_f(X)$中不同元素，不妨设$A\backslash B\neq\varnothing$，则$G=X\backslash B$为$X$中开集，从而$I_*(G)$为$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$中开集，但由于$A\in I_*(G)$，$B\notin I_*(G)$，所以知$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$为$T_0$空间.

定理 1.3.6 若$(X,\mathbf{J})$是正则拓扑空间，则$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$是 Hausdorff 空间，如果$(X,\mathbf{J})$是$T_1$空间，$(\mathbf{P}_5(x),\mathbf{J}_v)$是

Hausdorff 空间，则$(X,\mathbf{J})$一定是正则的空间（从而也是T_0空间）.

证明　设$(X,\mathbf{J})$是正则的，A,B为$\mathbf{P}_f(X)$中不同元素，不妨设$A\backslash B\neq\varnothing$取$x\in A\backslash B$，依假设存在不相交开集$G,G'$，使得$x\in G,B\subset G'$，从而$A\in I_*(G),B\in I^*(G')$，但显然$I^*(G'),I_*(G)$为$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$中不相交开集，所以知$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$是 Hausdorff 空间.

相反地，假设$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$是 Hausdorff 空间，$(X,\mathbf{J})$为$T_1$空间. 任取$X$中非空闭集$F$及不属于$F$的元素$x\in X$，则$F$与$F'=F\cup\{x\}$为$\mathbf{P}_f(X)$不同元素，从而存在$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$中两个不相交的开集$\mathbf{G},\mathbf{G}'$使得$F\in\mathbf{G},F'\in\mathbf{G}'$. 由于任意与$F$相交的开集必然与$F'$相交，所以$\mathbf{G}$必须是某些具有形式$I^*(G),G\in\mathbf{J}$的开集的并，所以存在$G\in\mathbf{J}$，使$F\in I^*(G)$，$F'\notin I^*(G)$. 另一方面，由于任意包含$F'$的开集必然包含$F$，所以$\mathbf{G}'$必须具有形式$I_*(G')$，即存在开集$G'$使$x\in G',F\cap G'=\varnothing$. 由于$\mathbf{G}$与$\mathbf{G}'$不相交，所以必有$G\cap G'=\varnothing$，而$x\in G',F\subset G$，因此$(X,\mathbf{J})$是正则的.

定理 1.3.7　对于任意拓扑空间$(X,\mathbf{J})$，$(\mathbf{P}_k(X),\mathbf{J}_v)$是 Hausdorff 空间当且仅当$(X,\mathbf{J})$是 Hausdorff 空间.

证明　**充分性**　设$(X,\mathbf{J})$是 Hausdorff 空间，A,B是$\mathbf{P}_k(X)$中不同元素，不妨设$A\backslash B\neq\varnothing$. 任取$x\in A\backslash B$，由于$B$是紧的，$x\notin B$，利用有限覆盖定理及 Hausdorff 空间的性质知存在不相交开集G,G'，使得$x\in G,B\subset G'$. 类似定理 1.3.6

即可证$(\mathbf{P}_k(X),\mathbf{J}_v)$是Hausdorff空间.

必要性 设$(\mathbf{P}_k(X),\mathbf{J}_v)$是Hausdorff空间,$a,b\in X,a\neq b$,令$F=\{a\},F'=\{a,b\}$,则$F,F'\in \mathbf{P}_k(X)$且$F\subset F'$,类似定理1.3.6可证存在不相交的开集$G,G'$,使$\{a\}\in I^*(G),\{a,b\}\in I_*(G')$,于是$a\in G,b\in G'$,从而知$(X,\mathbf{J})$为Hausdorff空间.

定理1.3.8 设$(X,\mathbf{J})$为正则拓扑空间,$\mathbf{C}$是$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$中紧子集,则$B=\bigcup\{C,C\in \mathbf{C}\}$是闭集.

证明 只须证明对于任给$x\in X\backslash B$,x为$X\backslash B$内点.对于任给$C\in\mathbf{C}$,由于$C\in\mathbf{P}_f(X)$,$x\notin C$,由$(X,\mathbf{J})$的正则性知,存在不交开集G_c,G'_c,使$C\subset G_c,x\in G'_c$.由于任给$C\in\mathbf{C}$,$C\in I^*(G_c)$,所以$\{I^*(G_c),C\in\mathbf{C}\}$是$\mathbf{C}$的一个开覆盖,但$\mathbf{C}$是$\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$的紧子集,于是存在$\mathbf{C}$的有限子覆盖$\{I^*(G_{ck}),1\leqslant k\leqslant n\}$.设$G=\bigcap\limits_{i=1}^{n}G'_{ck}$,其中$G'_{ck}$为上述与$G_{ck}$对应的开集,则$x\in G$,且$B\cap G=\varnothing$,所以$x$为$X\backslash B$的内点,从而$B$为闭集.

定理1.3.9 设$(X,\mathbf{J})$是任意拓扑空间,$\mathbf{C}$是$\mathbf{P}_k(X),\mathbf{J}_v)$的紧子集,则$B=\bigcup\{C,C\in\mathbf{C}\}$是紧集.

证明 设$\{G_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$是$B$的一个开覆盖,则它也是每一个$C\in\mathbf{C}$的开覆盖.由于$C\in\mathbf{C}$是紧的,所以存在$\Lambda$的有限子集$N_c$,使$C\subset\bigcup\{G_\lambda,\lambda\in N_c\}$.令

$$G_c=\bigcup\{G_\lambda,\lambda\in N_c\}(C\in\mathbf{C})$$



则$\{I^*(G_c),C\in\mathbf{C}\}$是$\mathbf{C}$的开覆盖,由于$\mathbf{C}$是$(\mathbf{P}_K(X),\mathbf{J}_v)$的紧集,故存在$\mathbf{C}$的有限子覆盖$\{I^*(G_{ck}),1\leqslant k\leqslant n\}$,令$N$

$=\bigcup_{k=1}^{n} N_{\alpha}$，则 N 是有限集，且 $B \subset \bigcup_{\lambda \in N} G_{\lambda}$，从而知 B 是紧的．

定理 1.3.10 若$(X, \mathbf{J})$ 是紧的，则$(\mathbf{P}_f(X), \mathbf{J}_v)$ 是紧的．相反的，若$(X, \mathbf{J})$ 是 T_1 空间，$(\mathbf{P}_f(X), \mathbf{J}_v)$ 是紧的，则$(X, \mathbf{J})$ 是紧的．

证明 根据 Alexander 子基定理，若$(\mathbf{P}_f(X), \mathbf{J}_v)$ 的任意一个由其子基元素构成的开覆盖存在有限子覆盖，则$(\mathbf{P}_f(X), \mathbf{J}_v)$ 是紧的．设$\{I^*(G_r), I_*(G_s); r \in \Lambda_1, s \in \Lambda_2\}$ 是 $\mathbf{P}_f(X)$ 的开覆盖，记

$$G = \bigcup \{G_s, s \in \Lambda_2\}, F_0 = X \backslash G$$

则 F_0 是闭的．若 $F_0 \neq \varnothing$，则 $F_0 \in \mathbf{P}_f(X)$，而由于 $F_0 \cap G_s = \varnothing (s \in \Lambda_2)$，所以存在 $r_0 \in \Lambda_1$，使 $F_0 \in I^*(G_{r0})$，于是$\{G_{r0}, G_s, s \in \Lambda_2\}$ 为 X 的开覆盖，依 X 的紧性，存在有限的子覆盖$\{G_{r0}, G_{si}(1 \leqslant i \leqslant n)\}$．由于任给闭集 $F \in \mathbf{P}_f(X)$，F 或者包含于 G_{r0}，或者与某一 G_{si} 相交，故

$$\{I^*(G_{r0}), I_*(G_{si})(i \leqslant i \leqslant n)\}$$

是 $\mathbf{P}_f(X)$ 的有限子覆盖．对于 $F_0 = \varnothing$ 的情形可类似证明．所以$(\mathbf{P}_f(X), \mathbf{J}_v)$ 是紧的．

相反地，若$(\mathbf{P}_f(X), \mathbf{J}_v)$ 是紧的，则$(\mathbf{P}_f(X), \mathbf{J}_l)$ 必是紧的，设$\{G_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是 X 的任一开覆盖，由于 $\mathbf{P}_f(X)$，中任一元素 F 必与某一 G_λ 相交，故$\{I_*(G_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ 是 $\mathbf{P}_f(X), \mathbf{J}_l)$ 的一个开覆盖，从而存在有限子覆盖

$$\{I_*(G_{\lambda i}), 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

由于 X 为 T_1 空间，所以单点集$\{x\} \in \mathbf{P}_f(X)$，因此$\{G_{\lambda i}, 1 \leqslant i$

$\leqslant n)$ 覆盖 X,从而知 X 是紧的.

定理 1.3.11 设$(X,\mathbf{J})$ 为拓扑空间,则下列命题等价:

(1) X 是紧的 Hausdorff 空间;

(2) $(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_v)$ 是紧的Hausdorff 空间且X 是T_1 空间;

(3) $(\mathbf{P}_k(X),\mathbf{J}_v)$ 是紧的 Hausdorff 空间.

证明 由于紧的Hausdorff 空间是正则的,依定理1.3.6及定理 1.3.10 即证(1) 等价于(2). 下证(3) 与(1) 等价.

若(3) 成立,取$\mathbf{C}=\mathbf{P}_k(X)$,则$\mathbf{C}$ 是紧的且包含 X 中单点集,由定理 1.3.9 知 $X=\bigcup\{C,C\in\mathbf{C}\}$ 是紧的,再根据定理 1.3.7 即知(1) 成立. 若(1) 成立,则 $\mathbf{P}_f(X)=\mathbf{P}_k(X)$,而(1) 与(2) 等价,从而(3) 成立.

定理 1.3.12 若$(X,\mathbf{J})$ 是局部紧的,则 $\mathbf{P}_k(X)$ 是 $\mathbf{P}_f(X)$ 中的开集.

证明 设 $K\in\mathbf{P}_k(X)$,由于 X 是局部紧的,所以存在开集G,使得$K\subset G$ 且 $\mathrm{cl}G\in\mathbf{P}_k(X)$. 因为$I(G)$ 是 K 的一个开邻域,而任给 $F\in I^*(G)$,由于 $F\subset\mathrm{cl}G\in\mathbf{P}_k(X)$,故 $F\in\mathbf{P}_k(X)$,所以知$I^*(G)\subset\mathbf{P}_k(X)$,即$K$ 为 $\mathbf{P}_k(X)$ 的内点.

[注 1] 由于度量空间(特别地 Banach 空间) 必是正则的T_1 空间,所以定理 1.3.1—1.3.12 对于任意度量空间(X,d) 自然也成立.

[注 2] 尚未见到在Banach 空间X 中,关于$(\mathbf{P}_k(X),\mathbf{J}_v)$的诸如$(\mathbf{P}_{wkc}(X),\mathbf{J}_v)$ 等一类子空间性质的讨论. 但鉴于弱紧集、凸集在 Banach 空间理论中的重要地位,这样的讨论是有

益的.

设(X,d)为度量空间,对于任意$A \in \mathbf{P}_0(X)$,$r > 0$,记

$$S_\mu(A,r) = \{B \in \mathbf{B}_0(X), \delta_\mu(A,B) < r\}$$

$$S_l(A,r) = \{B \in \mathbf{B}_0(X), \delta_l(A,B) < r\}$$

$$S_H(A,r) = \{B \in \mathbf{B}_0(X), \delta_\mu(A,B) < r\}$$

称S_μ,S_l及S_H为δ_μ,δ_l及δ的球形邻域.由定理1.2.4及其后面的注可知$\delta_\mu(\cdot,\cdot)$、$\delta_l(\cdot,\cdot)$及$\delta(\cdot,\cdot)$均为$\mathbf{P}_0(X)$上的半度量,从而均可在$\mathbf{P}_0(X)$上产生一个拓扑,且分别以$\{S_\mu(A,r), A \in \mathbf{P}_0(X), r > 0\}$、$\{S_l(A,r), A \in \mathbf{P}_0(X), r > 0\}$及$\{S_H(A, r), A \in \mathbf{P}_0(X), r > 0\}$为其基(Kelly[48]).

称以δ_μ产生的拓扑为$\mathbf{P}_0(X)$上的上半度量拓扑,记作$(\mathbf{P}_0(X), \delta_\mu)$,称以$\delta_l$产生的拓扑为$\mathbf{P}_0(X)$上的下半度量拓扑,记作$(\mathbf{P}_0(X), \delta_l)$,称以$\delta$产生的拓扑为$\mathbf{P}_0(X)$上的Hausdorff拓扑,记作$(\mathbf{P}_0(X), \delta)$.这样在度量空间的超空间上就有了两种类型的拓扑.一种是在(X,d)基础上建立的上拓扑、下拓扑与Vietoris拓扑,另一种是在$\mathbf{P}_0(x)$上直接建立的上半度量拓扑、下半度量拓扑与Hausdorff拓扑.下面讨论两种拓扑的关系.

定理1.3.13 设$\mathbf{G} \subset \mathbf{P}_0(X)$是$(\mathbf{P}_0(X), \delta_\mu)$中的开集,则$\mathbf{G}$必是$(\mathbf{P}_0(X), \mathbf{J}_\mu)$中的开集.

证明 设$\mathbf{G}$是$(\mathbf{P}_0(X), \delta_\mu)$的开集,若$A \in \mathbf{G}$,则必须存在$r > 0$,使

$$S_\mu(A,r) \subset \mathbf{G}$$

任取 $r' < r$，若 $C \subset r' + A$，则 $C \in S_u(A,r)$，从而 $C \in \mathbf{G}$，故得 $I^*(r' + A) \subset \mathbf{G}$. 但由于 $r' + A$ 是开集，从而 $I^*(r' + A)$ 是 A 在 $(\mathbf{P}_0(X), \mathbf{J}_u)$ 中的开邻域. 因此，$\mathbf{G}$ 是 $(\mathbf{P}_0(X), \mathbf{J}_u)$ 中的开集.

例1.3.1 定理1.3.13反之不一定成立. 设 (R^2, d) 为欧氏空间，$G = \{(x,y), x > 0, y > 0\}$，则 $I^*(G)$ 是 $(\mathbf{P}_0(R^2), \mathbf{J}_u)$ 中的开集. 下面说明它不是 $\mathbf{P}_0(R^2), \delta_u)$ 中的开集. 取

$$A = \{(x,y), x > 0, y > 0, y \geqslant \frac{1}{x}\}$$

则 $A \in I^*(G)$，但对于任意 $r > 0$，$r + A$ 不包含于 G 中，所以 A 不是上半度量拓扑 $(\mathbf{P}_0(R^2), \delta_u)$ 中 $I^*(G)$ 的内点. 因此，$I^*(G)$ 不是上半度量拓扑 $(\mathbf{P}_0(R^2), \delta_u)$ 中的开集.

定理1.3.14 设 $\mathbf{G} \subset (\mathbf{P}_0(X)$ 是 $(\mathbf{P}_0(X), \mathbf{J}_l)$ 中的开集，则它必是 $(\mathbf{P}_0(X), \delta_l)$ 中的开集.

证明 仅须考虑 $(\mathbf{P}_0(X), \mathbf{J}_l)$ 的子基开集 $I_*(G)$. 设 $A \in I_*(G)$，则 $A \cap G \neq \varnothing$，取 $x \in A \cap G$，x 是 G 的内点，于是存在 $r > 0$，使得 $S(x,r) \subset G$. 下面证明

$$S_l(A,r) \subset I_*(G)$$

若 $B \in S_l(A,r)$，则 $\delta_l(A,B) < r$，即 $A \subset r + B$. 由 $x \in A$ 知 $x \in r + B$，从而存在 $b \in B$，使 $d(x,b) < r$，所以 $b \in G$，即知 $B \cap G \neq \varnothing$，所以 $B \in I_*(G)$. 因此 $S_l(A,r) \subset I_*(G)$，所以 $I_*(G)$ 是 $(\mathbf{P}_0(X), \delta_l)$ 中的开集.

例1.3.2 定理1.3.14反之并不一定成立. 设 (R^2, d) 为欧氏空间，$A = \{(x,y), y = 0\}$，取

$$\mathbf{G} = \{B, \delta_l(A,B) < r\} = S_l(A,r)$$

则 G 是$(\mathbf{P}_0(R^2),\delta_l)$中的开集，且 A 是 G 的内点．设$\bigcap_{i=1}^{n} I_*(G_i)$是 A 在$(\mathbf{P}_0(R^2),\mathbf{J}_l)$中的一个基本邻域，取 $F=\{x_l,\cdots,x_n\}$，$x_i \in G_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $F\in\bigcap_{i=1}^{n} I_*(G_i)$．但由于 F 是有限集，从而有界，所以 $\lambda+F$ 也是有界集，不可能存在 $\lambda>0$，使 $A\subset\lambda+F$，所以 $\delta_l(A,F)=+\infty$，F 不在 G 中．因此，G 不是$(\mathbf{P}_0(X),\mathbf{J}_l)$中的开集．

定理 1.3.15 设(X,d)是度量空间，则

(1) $(\mathbf{P}_k(X),\mathbf{J}_u)=(\mathbf{P}_k(X),\delta_u)$；

(2) $(\mathbf{P}_k(X),\mathbf{J}_l)=(\mathbf{P}_k(X),\delta_l)$；

(3) $(\mathbf{P}_k(X),\mathbf{J}_v)=(\mathbf{P}_k(X),\delta)$.

证明 (1) 由定理 1.3.13 仅须证对任意开集 G，$I^*(G)\cap\mathbf{P}_k(X)$ 是$(\mathbf{P}_k(X),\delta_u)$中开集即可．

设 $K\in I^*(G)\cap(\mathbf{P}_k(X)$，则 $\delta_u(K,X\backslash G)=r>0$. $K'\in\mathbf{P}_k(X)$，且 $\delta_u(K,K')<\frac{r}{2}$，则 $K'\subset\frac{r}{2}+K\in I^*(G)$. 于是，可知 $S_u(K,\frac{r}{2})\subset I^*(G)$，即 K 是 $I^*(G)$ 在$(\mathbf{P}_0(X),\delta_u)$中的内点．即证 $I^*(G)\cap\mathbf{P}_k(X)$ 为$(\mathbf{P}_k(X),\delta_u)$中的开集．

(2) 同样，由定理 1.3.14，仅须证明$(\mathbf{P}_k(X),\delta_l)$中的任意开集 G 也是$(\mathbf{P}_0(k),\mathbf{J}_l)$中的开集．任取 $K\in\mathbf{G}$，则存在 $r>0$，使 $S_l(K,r)\cap\mathbf{P}_k(X)\subset\mathbf{G}$，于是若 $K\subset r+K'$，则 $K\in\mathbf{G}$，由于 K 是紧的，所以存在$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset K$，使得 K

$\subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$，其中 $G_i = S(x_i, \frac{r}{2})(1 \leqslant i \leqslant n)$. 所以 $\bigcap_{i=1}^{n} I_*(G)$ 是 $(\mathbf{P}_k(X), \mathbf{J}_l)$ 中 K 的一个基本邻域. 如果 $K' \in \bigcap_{i=1}^{n} I_*(G_i)$，则 $K' \cap G_i \neq \varnothing (1 \leqslant i \leqslant n)$，所以

$$G_i \subset r + K'(1 \leqslant i \leqslant n), K \subset r + K'$$

从而 $K' \in \mathbf{G}$，即知 $\bigcap_{i=1}^{n} I_*(G_*) \subset \mathbf{G}$，因此 $K \in \mathbf{G}$ 必是 $\mathbf{G}$ 在 $(\mathbf{P}_k(X), \mathbf{J}_l)$ 中的内点. 由 $K \in \mathbf{G}$ 的任意性即证.

(3) 综合(1)，(2) 即可证明.

推论 1.3.1 设(X,d) 为度量空间，则$(\mathbf{P}_k(X), \delta)$ 仅仅依赖于 X 上的拓扑，而不依赖于度量.

推论 1.3.2 设(X,d) 为可分的度量空间，则$(\mathbf{P}_k(X), \delta)$ 是可分的.

证明 由定理1.3.3，若记D为X的可数稠密子集，则D的有限子集全体U_D稠密于$(\mathbf{P}_0(X), \mathbf{J}_v)$，但由于$X$的任意有限子集是紧的，故 $\mathbf{U}_D$ 也是$(\mathbf{P}_k(X), \mathbf{J}_v)$ 的可数稠密子集，从而可证$(\mathbf{P}_k(X), \mathbf{J}_v)$ 是可分的. 但由定理 1.3.15 知 $\mathbf{P}_k(X)$ 上的 Vietoris 拓扑与 Hausdorff 拓扑等价，故$(\mathbf{P}_k(X), \delta)$ 是可分的.

推论 1.3.3 (Blascke's Selection theorem) 设 X 是一个 Banach 空间的紧子集，$\{K_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，则存在$\{K_n\}$ 的子列$\{K_{n_i}\}$ 及 $K \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，使得 $\delta(K_{n_i}, K) \to 0$.

证明 由于 X 是紧的，由定理 1.3.15 知 $\mathbf{P}_f(X)$ 上的 Vietoris 拓扑与 Hausdorff 拓扑等价，利用定理 1.3.11 即得 $(\mathbf{P}_f, (x), \delta)$ 是紧的度量空间. 由度量空间中紧性与序列紧的

等价性即知存在子列$\{K_{n_i}, i \geqslant 1\}$及$K \in \mathbf{P}_f(X)$，使得

$$\lim_{i\to\infty}\delta(K_{n_i}, K) = 0.$$

由定理 1.2.8 易知$K \in \mathbf{P}_{fc}(X)$.

[注] 由于$\mathbf{P}_k(X)$上的Vietoris拓扑与Hausdorff拓扑等价，因而对于$\mathbf{P}_k(X)$上的Hausdorff拓扑与其基本拓扑空间(X,d)的关系，可完全套用定理1.3.1—1.3.12的结果．对于$\mathbf{P}_f(X)$，也可相应地讨论$(\mathbf{P}_f(X),\delta)$与其基本拓扑空间(X,d)的关系，见Klein and Thompson[52].

设(X,d)为度量空间，用$B(\mathbf{P}_k(X))$表示$(\mathbf{P}_k(X),\delta)$的Borel σ代数，用$\sigma(I_*(G))$、$\sigma(I^*(G))$分别表示$\mathbf{P}_k(X)$上的集族

$$\{I_*(G) \cap \mathbf{P}_k(X), G\text{ 为开集}\}$$

$$\{I^*(G) \cap \mathbf{P}_k(X), G\text{ 为开集}\}$$

生成的σ代数．

定理 1.3.16 设(X,d)为可分的度量空间，则

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}_k(X)) = \sigma(I_*(G)) = \sigma(I^*(G))$$

证明 分三步证明．

(1) 首先证明$\sigma(I_*(G)) \subset \sigma(I^*(G))$．对于任意$I_*(G)$，由于$G$为开集，因而可取闭集列$\{F_n, n \geqslant 1\}$

$$F_n = \{x \in X, d(x, X\backslash G) \geqslant \frac{1}{n}\}$$

使得$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，于是有

$$I_*(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(I_*(F) \cap \mathbf{P}_k(X))$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbf{P}_k(X)\backslash I^*(X\backslash F_n))\in\sigma(I^*(G))$$

所以 $\sigma(I_*(G))\subset\sigma(I^*(G))$.

(2) 再证明 $\sigma(I^*(G))\subset\sigma(I_*(G))$. 对于任意 $I^*(G)$, 由于 $X\backslash G$ 为闭集，因而可取开集列 $\{G_n, n\geqslant 1\}$

$$G_n=\{x\in X, d(x, X\backslash G)<\frac{1}{n}\}$$

使得 $X\backslash G\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$. 由于对于任意紧集 $K\subset X, K\bigcap(X\backslash G)\neq\varnothing$ 当且仅当 $K\bigcap G_n\neq\varnothing(n\geqslant 1)$，所以有

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_k(X)\backslash(I^*(G)\bigcap\mathbf{P}_k(X))\\&=\{K\in\mathbf{P}_k(X), K\bigcap(X\backslash G)\neq\varnothing\}\\&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{K\in\mathbf{P}_k(X), K\bigcap G_n\neq\varnothing\}\\&=\bigcap_{n=1}^{\infty}(I_*(G)\bigcap\mathbf{P}_k(X))\in\sigma(I_*(G))\end{aligned}$$

于是 $\sigma(I^*(G))\subset\sigma(I_*(G))$.

(3) 由于 $\mathbf{B}(\mathbf{P}_k(X))$ 是由 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 中开集全体生成的，而 $I^*(G), I_*(G)$ 均为 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 中开集，故知

$$\sigma(I^*(G))=\sigma(I_*(G))\subset\mathbf{B}(\mathbf{P}_k(X))$$

下证 $\mathbf{P}_k(X)$ 中任意开集均属于 $\sigma(I^*(G))=\sigma(I_*(G))$.

由于 $\{I^*(G), I_*(G), G$ 为开集$\}$ 是 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 的一个子基，设 $\mathbf{u}$ 为该子基元素有限交的全体，则

$$\mathbf{U}\subset\sigma(I^*(G))=\sigma(I_*(G))$$

因为 X 可分，依推论 1.3.2 知 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 可分，从而 $\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 任意开集均可表示为 $\mathbf{U}$ 中元素的可数并，因此 $\theta\in\sigma(I^*(G))$

$= \sigma(I_*(G))$. 故

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}_k(X)) = \sigma(I^*(G)) = \sigma(I_*(G))$$

下面给出超空间上几种比 Vietoris 拓扑更弱的拓扑，它们在集值随机过程的研究中很有用处。

定义 1.3.2 （闭收敛拓扑）$(X,\mathbf{J})$ 为拓扑空间，记 $\overline{\mathbf{P}}_f(X)$ 为 X 上闭集全体，$\overline{\mathbf{P}}_k(X)$ 为 X 上紧集全体，记

$$\bar{I}^*(K^c) = \{F \in \overline{\mathbf{P}}_f(X), F \cap K = \varnothing\}$$

$$\bar{I}_*(G) = \{F \in \overline{\mathbf{P}}_f(X), F \cap G \neq \varnothing\}$$

称为$\{\bar{I}_*(G), \bar{I}^*(K^c), G$ 为开集，K 为紧集$\}$ 为子基的拓扑，为 $\overline{\mathbf{P}}_f(X)$ 上的闭收敛拓扑，记作$(\overline{\mathbf{P}}_f(X), \mathbf{J}_c)$.

设$(X,\mathbf{J})$ 为局部紧的 Hausdorff 空间．考虑 X 的加一点紧化拓扑$(X',\mathbf{J}')$：

$$X' = X \cup \{\infty\}$$

$\mathbf{J}' = \{G \subset X', \infty \in G, X' \backslash G$ 是 X 中紧集$\} \cup \mathbf{J}$ 则$(X',\mathbf{J}')$ 是紧的 Hausdorff 空间．定义映射 $\alpha: \overline{\mathbf{P}}_f(X) \to \mathbf{P}_f(X')$ 如下：

$$\alpha(F) = F \cup \{\infty\}$$

则 α 是由 $\overline{\mathbf{P}}_f(X)$ 到其值域

$$\mathbf{P}_\infty(X') = \{F \subset X', F \in \mathbf{P}_f(X'), \infty \in F\}$$

上的一个双射(bijection)，并且由于

$$\mathbf{P}_f(X') \backslash \mathbf{P}_\infty(X') = \{F \in \mathbf{P}_f(X'), F \subset X\}$$

是$(\mathbf{P}_f(X'), \mathbf{J}_v)$ 的开集，故 $\mathbf{P}_\infty(X')$ 是$(\mathbf{P}_f(X'), \mathbf{J}_v)$ 中闭集．

定理 1.3.17 设$(X,\mathbf{J})$ 为局部紧的 Hausdorff 空间，则上述定义的映射 α 是从$(\overline{\mathbf{P}}_f(X), \mathbf{J}_c)$ 到$(\mathbf{P}_\infty(X'), \mathbf{J}_v)$ 的同胚映

射．

证明 仅须证明α是连续的．任给$\bar{I}_*(G)$，G为X的开集，则G为X'的开集．由于对于任意$F\in\bar{\mathbf{P}}_f(X)$，$F\cap G\neq\varnothing$当且仅当$\alpha(F)\cap G$在$X'$中非空，故$\alpha(\bar{I}_*(G))=I_*(G)$是$(\mathbf{P}_f(X'),\mathbf{J}_v)$中的开集．任取$\bar{I}^*(K^c)$，$K$为$X$中紧集，则$G=(X\backslash K)\cup\{\infty\}$为$X'$中的开集．由于对于任意$F\in\bar{\mathbf{P}}_f(X)$，$F\cap K=\varnothing$当且仅当$\alpha(F)\subset G$，故$\alpha(\bar{I}^*(K^c))=I^*(K^c)$为$(\mathbf{P}_f(X'),\mathbf{J}_v)$中的开集．

相反地，任给$I^*(G')$、$I_*(G')$，G'为X'的开集，则G'或为X中开集，或存在X中紧集K，使得$G'=(X\backslash K)\cup\{\infty\}$．当$G'$为$X$的开集时，有

$$\alpha^{-1}(I^*(G'))=\varnothing=\alpha(\bar{I}_*(\varnothing))$$

$$\alpha^{-1}(I_*(G'))=\alpha(\bar{I}_*(G'))\cap\bar{\mathbf{P}}_f(X)$$

当$G'=(X\backslash K)\cup\{\infty\}$（$K$为$X$中紧集）时，有

$$\alpha^{-1}(I_*(G'))=\alpha^{-1}(\mathbf{P}_\infty(X'))=\mathbf{P}_f(X)$$

$$\alpha^{-1}(I^*(G'))=\bar{I}^*(K^c)$$

它们均为$(\bar{\mathbf{P}}_f(X),\mathbf{J}_c)$中的开集．

综上所述，$\alpha(\cdot)$是连续的，因而是从$(\bar{\mathbf{P}}_f(X),\mathbf{J}_c)$到$(\mathbf{P}_f(X'),\mathbf{J}_v)$的同胚映射．

定理 1.3.18 如果假设$(X,\mathbf{J})$是局部紧的 Hausdorff 空间，则$(\bar{\mathbf{P}}_f(X),\mathbf{J}_c)$是紧的 Hausdorff 空间，$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$是局部紧的 Hausdorff 空间．

证明 由于$(X',\mathbf{J}')$为紧的 Hausdorff 空间，则由定理

1.3.11 知$(\mathbf{P}_f(X'),\mathbf{J}_v)$为紧的Hausdorff空间．而$\mathbf{P}_\infty(X')$是$(\mathbf{P}_f(X'),\mathbf{J}_v)$的闭子集，因而$(\mathbf{P}_\infty(X'),\mathbf{J}_v)$是紧的Hausdorff空间．于是根据定理1.3.17，$(\overline{\mathbf{P}}_f(X),\mathbf{J}_c)$是紧的Hausdorff空间．由于$\overline{\mathbf{P}}_f(X)=\mathbf{P}_f(X)\cup\{\varnothing\}$，故$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$是局部紧的Hausdorff空间．

定理 1.3.19 设$(X,\mathbf{J})$是局部紧的、可分的度量空间，则$(\overline{\mathbf{P}}_f(X),\mathbf{J}_c)$是紧的可度量化空间．

证明 由假定知$X'=X\cup\{\infty\}$是紧的可度量化空间．依定理1.3.15知$\mathbf{P}_f(X')=\mathbf{P}_k(X')$上的Vietoris拓扑与Hausdorff度量拓扑是等价的，因而$(\mathbf{P}_f(X'),\mathbf{J}_v)$是可度量化空间．于是根据定理1.3.17知$(\overline{\mathbf{P}}_f(X),\mathbf{J}_c)$是紧的可度量化空间．

［注］ 闭收敛拓扑的重要性在于$\mathbf{P}_f(X)$上闭集列在该拓扑意义下的收敛性等价于闭集列在Kuratowski意义下的收敛性，见本章§1.5.

定义 1.3.3 （Mosco拓扑）设X为Banach空间，沿用以前记号，称$\mathbf{P}_{fc}(X)$上以$\{I_*(G),I^*(K^c);G$为强开集，K为弱紧集$\}$为子基拓扑为Mosco拓扑，记作$(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_M)$.

设

$$I(G_1,G_2,\cdots,G_n;K)=(\bigcap_{i=1}^{n}I_*(G_i))\cap I^*(K^c)$$

由于$I^*((K_1\cup K_2)^c)=I^*(K_1^c)\cap I^*(K_2^c)$，容易看出$\mathbf{P}_{fc}(X)$上集族

$$\{I(G_1,\cdots,G_n;K),G_i\text{ 为强开集}(1\leqslant i\leqslant n)$$

$$K \text{ 为弱紧集}, n \geqslant 1\}$$

为 Mosco 拓扑的一个基.

为了讨论 Mosco 拓扑的性质,先给出两条引理.

引理 1.3.1 设 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{bfc}(X)$, $A_n \downarrow$, 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. 令 $C_n = \text{co}(\{\theta\} \cup A_n)(n \geqslant 1)$, 则 $\{C_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$, 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{\theta\}$.

证明 显然 $\theta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. 假设 $c \neq \theta, c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, 则对任意 $n \geqslant 1$ 存在 $\lambda_n \in [0,1]$ 及 $a_n \in A_n$, 使 $\lambda_n a_n = c$. 任取收敛到 λ 的子序列 $\{\lambda_{nk}, k \geqslant 1\}$, 由于 $c \neq \theta$ 而 $\sup\limits_{n \geqslant 1} \| a_n \| < \infty$, 所以

$$\lambda = \lim_k \lambda_{nk} \neq 0.$$

但由于 $c/\lambda = \lim\limits_{k \to \infty} c/\lambda_{nk} = \lim\limits_k a_{nk}$, 从而 $c/\lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 这就与 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ 矛盾. 因此, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{\theta\}$.

引理 1.3.2 设 X 为非自反的 Banach 空间. 对于任给的 $K \in \mathbf{P}_{wk}(X)$ 及非空强开集 $\{G_1, \cdots, G_n\}$(不必互不相同), 存在 $\{x_1, \cdots, x_n\}$, $x_i \in G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 且 x_i 互不相同, 使得

$$\text{co}\{x_1, \cdots, x_n\} \cap K = \varnothing$$

证明 任取 $\varepsilon > 0$, 选择互不相同的 $\{x_1, \cdots, x_n\}$, 使得

$$\overline{S}(x_i, \varepsilon) \subset G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$$

对于任意的 $u \in \overline{S}(\theta, 1)$, 记

$$P(u) = \text{co}\{x_1 + \varepsilon u, \cdots, x_n + \varepsilon u\} = P(\theta) + \varepsilon u$$

我们证明存在 $u \in \overline{S}(\theta, 1)$, 使 $P(u) \cap K = \varnothing$.

假设不然，则 $u \in \bar{S}(\theta,1)$，$P(u) \cap K \neq \varnothing$，从而知

$$\varepsilon u \in K - P(\theta)$$

即 $\bar{S}(\theta,\varepsilon) \subset K - P(\theta)$. 由于 $K \in \mathbf{P}_{wk}(X)$，由 James 定理易证 $P(\theta)$ 也是弱紧的，所以 $K - P(\theta)$ 也是弱紧集．但由 Banach 空间理论知非自反空间中弱紧集的强内部必为空集，从而导致矛盾．故所证结论成立．

定理 1.3.20 设 X 为 Banach 空间，则下列命题等价：

(1) X 是自反的；

(2) $(\mathbf{P}_{fc}(X), \mathbf{J}_M)$ 是 Hausdorff 空间．

证明 "(1)⇒(2)" 任给 $A, C \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，$A \neq C$，不妨假设 $A \backslash C \neq \varnothing$. 取 $a \in A$，$a \notin C$，则存在 $\varepsilon > 0$，使 $\bar{S}(a,\varepsilon) \cap C = \varnothing$. 因而知

$$C \in I^*((\bar{S}(a,\varepsilon))^c)$$

$$A \in I_*(S(a,\varepsilon))$$

由于 X 自反，故 $\bar{S}(a,\varepsilon)$ 是弱紧的，从而 $I^*((\bar{S}(a,\varepsilon))^c)$ 为 C 的 $\mathbf{J}_M$ 邻域，$I_*(S(a,\varepsilon)$ 为 A 的 $\mathbf{J}_M$ 邻域．显然 $I^*((\bar{S}(a,\varepsilon))^c) \cap I_*(S(a,\varepsilon)) = \varnothing$. 因此，$(\mathbf{P}_{fc}(X), \mathbf{J}_M)$ 是 Hausdorff 空间．

"(2)⇒(1)" 假设 X 不是自反的．任取 $(\mathbf{P}_{fc}(X), \mathbf{J}_M)$ 的两个基本开集 $I(G_1, \cdots, G_n; K)$、$I(V_1, \cdots, V_m; K')$. 由引理 1.3.2，存在 $x_i \in G_i$，$v_i \in V_i$ 使得

$$\mathrm{co}\{x_1, \cdots, x_n, v_1, \cdots, v_m \cap (K \cup K') = \varnothing$$

$$\overline{\mathrm{co}}\{x_1, \cdots, x_n, v_1, \cdots, v_m\}$$

$$\in (\bigcap_{i=1}^{n} I_*(G_i)) \cap (\bigcap_{j=1}^{m} I_*(V_j)) \cap I^*((K \cup K')^c)$$

$$=\left[\left(\bigcap_{i=1}^{n} I_*(G_i)\right)\cap I^*(K^c)\right]\cap\left[\left(\bigcap_{j=1}^{m} I_*(V_j)\right)\cap I^*(K'^c)\right]$$

$$=I(G_1,\cdots,G_n;K)\cap I(V_1,\cdots,V_m;K')$$

这说明$(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_M)$中任意两个基本开集有非空交，因而$(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_M)$不可能是Hausdorff空间，矛盾．因此$X$是自反的.

定理1.3.21 设X为自反的Banach空间，则下列命题等价

(1) $(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_M)$是第一可数空间；

(2) X是可分的Banach空间.

证明 “(1)⇒(2)”若$(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_M)$是第一可数空间，则它具有可数局部基．由于$X\in\mathbf{P}_{fc}(X)$，且$X$与任意非空子集相交非空，故$X$的局部子基只可能为具有形式$I_*(G)$($G$为强开集)的集族，因而存在可数开集列$\{G_n,n\geqslant 1\}$，使得$\{I_*(G_n),n\geqslant 1\}$有限交全体为$X$在$(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_M)$中的一个可数局部基．取$x_n\in G_n(n\geqslant 1)$，令

$$D=\{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_{nk},\lambda_k\in[0,1],\lambda_k\text{为有理数},$$

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k=1,m\geqslant 1\}$$

则D为X中可数集，下面证明D稠密于X. 任取$x\in X$及包含x的强开集U，则$X\in I_*(U)$，于是存在$\{G_{n1},\cdots,G_{n_m}\}$使得

$$X\in\bigcap_{k=1}^{m} I_*(G_{nk})\subset I_*(U)$$

但显然$\overline{D} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_*(G_{nk}) \subset I_*(U)$，所以$\overline{D} \cap U \neq \varnothing$，从而知$D \cap U \neq \varnothing$. 因此$D$稠密于$X$，即$X$是可分的.

"(2)⇒(1)"若X可分的，则它必存在可数稠密子集D. 任给$A \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，$x^* \in X^*$，令

$$H(x^*) = \{y \in X, < x^*, y > \geqslant \sup_{x \in A} < x^*, x >\}$$

则$A \subset H(x^*)$且存在X^*的可数点列$\{x_i^*, i \geqslant 1\}$使得$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} H(x_i^*)$（见本书引理2.1.2）. 任给$i \geqslant 1$及非负有理数$\alpha$，令

$$G_{i\alpha} = S(0, \alpha) \cup H^c(x_i^*)$$

则由X的自反性知$\text{cl}(G_{i\alpha})$为弱紧凸集且$A \in I^*((\text{cl}G_{i\alpha})^c)$.

设Q^+为非负有理数全体，记

$$\mathbf{U}_1 = \{I_*(S(x, r)), xD \in, r \in Q^+\}$$

$$\mathbf{U}_2 = \{I^*((clG_{i\alpha})^c), i \geqslant 1, \alpha \in Q^+\}$$

则$\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$为$(\mathbf{P}_{fc}(X), \mathbf{J}_M)$中的包含$A$的可数开集族. 下面证明$\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$中元素有限交全体构成$A$的局部基. 任给$A$的基本开集$I(G_1, \cdots, G_n; K)$，则$A \cap G_i \neq \varnothing (1 \leqslant i \leqslant n)$且$A \subset K^c$. 取非负有理数$r_i \in Q^+$及$x_i \in G_i \cap A$，使得$S(x_i, r_i) \subset G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，则知

$$A \in \bigcap_{i=1}^{n} I_*(S(x_i, r_i)) \subset \bigcap_{i=1}^{n} I_*(G_i)$$

对于弱紧集K，由于$A \subset K^c$，故$K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha \in Q^+} G_{i\alpha}$. 取$\alpha_1 \in Q^+$使得$K \subset S(0, \alpha_1)$，则依$K$的弱紧性知存在正整数$n_k \geqslant 1$，使得

$K \subset \bigcup_{i=1}^{nk} G_{i\alpha 1}$，从而 $K \subset \bigcup_{i=1}^{nk} \mathrm{cl} G_{i\alpha 1}$，因此

$$A \in \bigcap_{i=1}^{nk} (I^*((\mathrm{cl} G_{i\alpha 1})^c)) \subset I^*(K^c)$$

这就证明了 $\mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2$ 中元素有限交全体构成了 A 的局部基．因此 $(\mathbf{P}_{fc}(X), \mathrm{J}_M)$ 是第一可数的．

定义 1.3.4 （线性拓扑）设 X 为 Banach 空间，任给非零的 $x^* \in X^*$，$\alpha \in R$，记

$$H(x^*, \alpha) = \{C \in \mathbf{P}_{fc}(X), \sup_{x \in C} < x^*, x > < \alpha\}$$

称 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 以

$\{I_*(G), H(x^*, \alpha), G \subseteq X$ 为强开集，$x^* \in X^*$ 非零，$\alpha \in R\}$ 为子基的拓扑为线性拓扑，记作 J_L.

为研究线性拓扑的性质，我们需要下面三个容易证明的引理．任给非零的 $x^* \in X^*$，$\alpha \in R$，记 $L(x^*, \alpha) = \{x \in X, < x^*, x > = \alpha\}$. 任给 $A, B \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，称 $D(A, B) = \inf\{\| a - b \|, a \in A, b \in B\}$ 为 A, B 间的分离度．显然我们有，$A \cap B \neq \varnothing$ 当且仅当 $D(A, B) = 0$.

引理 1.3.3 设 G 为 X 中开集，$A \subseteq X$，则 $\mathrm{cl} A \cap G \neq \varnothing$ 当且仅当 $A \cap G \neq \varnothing$.

引理 1.3.4 设 $A \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，$x^* \in X^*$ 非零，$\alpha \in R$，则 $A \in H(x^*, \alpha)$ 当且仅当 $\sup_{x \in A} < x^*, x > \leqslant \alpha$，且 $D(A, L(x^*, \alpha)) > 0$. 特别地，若 $A \in H(x^*, \alpha)$，则

$$D(A, L(x^*, \alpha)) = \sup\{\varepsilon, (A + \varepsilon) \cap L(x^*, \varepsilon) = \varnothing\}$$

$$= \frac{\alpha - \sup_{x \in A} < x^*, x >}{\| x^* \|}$$

引理 1.3.5　设 $A\in \mathbf{P}_{fc}(X)$，$\varepsilon>0$，记 $\mathbf{D}'(A,\varepsilon)=\{C\in \mathbf{P}_{fc}(X);D(C,A)<\varepsilon\}$，$\bar{\mathbf{D}}(A,\varepsilon)=\{C\in \mathbf{P}_{fc}(X),D(C,A)>\varepsilon\}$，则它们有如下表示式：

$$\mathbf{D}'(A,\varepsilon)=I_*(\mathrm{int}(A+\varepsilon))$$

$$\bar{\mathbf{D}}(A,\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(I^*((A+\varepsilon+\frac{1}{n})^c))$$

定理 1.3.22　设 X 为 Banach 空间，则

$$\{\mathbf{D}'(A,\varepsilon),\bar{\mathbf{D}}(A,\varepsilon),A\in \mathbf{P}_{fc}(X),\varepsilon>0\}$$

是线性拓扑 $\mathbf{J}_L$ 的一个子基．

证明　首先，我们证明上述形式的集族是 $(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_l)$ 中的开集．任给 $A\in \mathbf{P}_{fc}(X)$，$\varepsilon>0$，依引理 1.3.5 即知 $\mathbf{D}'(A,\varepsilon)$ 是 $(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_l)$ 中开集；任取 $C\in\bar{\mathbf{D}}(A,\varepsilon)$，同样由引理 1.3.5 知存在 $n\geqslant 1$，使得 $(C+\frac{1}{n})\cap(A+\varepsilon+\frac{1}{n})=\varnothing$．由凸集分离定理，存在非零的 $x^*\in X^*$，$\alpha\in R$，使得

$$\sup\{<x^*,x>,x\in C+\frac{1}{n}\}\leqslant\alpha$$

$$\leqslant\inf\{<x^*,x>,x\in A+\varepsilon+\frac{1}{n}\}$$

则由引理 1.3.4 知 $C\in H(x^*,\alpha)$，但依上述第二个不等式易知 $H(x^*,\alpha)\subset\bar{\mathbf{D}}(A,\varepsilon)$，因此 C 是 $\bar{\mathbf{D}}(A,\varepsilon)$ 在线性拓扑意义下的内点．依 C 的任意性即知 $\bar{\mathbf{D}}(A,\varepsilon)$ 是开集．

其次，我们证明 $\{\mathbf{D}'(A,\varepsilon),\bar{\mathbf{D}}(A,\varepsilon),A\in(\mathbf{P}_{fc}(X),\varepsilon>0\}$ 确实是线性拓扑 $\mathbf{J}_L$ 的子基，任给 $A\in\mathbf{P}_{fc}(X)$ 及开集 G，使得 $A\cap G\neq\varnothing$，则存在 $x\in A$，$\varepsilon>0$，使得 $S(x,\varepsilon)\subset G$．显然，我

们有

$$A \in \mathbf{D}'(\{x\},\varepsilon) \subset I_*(G)$$

另一方面，任给 $A \in \mathbf{P}_{fc}(X)$ 及非零 $x^* \in X^*$，$\alpha \in R$，使得 $A \in H(x^*,\alpha)$. 令 $\lambda = \alpha - \sup\limits_{x \in A} < x^*, x >$，$\varepsilon = \dfrac{\lambda}{3} \| x^* \|$，依引理 1.3.4 可知

$$(A + \varepsilon) \cap (L(x^*,\alpha) + \varepsilon) = \varnothing$$

从而 $A \in \mathbf{D}'(A,\varepsilon) \cap \overline{\mathbf{D}}(L(x^*,\alpha),\varepsilon) \subset H(x^*,\alpha)$，证毕.

定理1.3.23 设 X 为Banach空间，则 $\varphi(A,B) = \overline{\mathrm{co}}(A \cup B)$ 及 $\psi(A,B) = \mathrm{cl}(A + B)$ 均是 $(\mathbf{P}_{fc}(X), \mathbf{J}_L) \times (\mathbf{P}_{fc}(X), \mathbf{J}_L)$ 到 $(\mathbf{P}_{fc}(X), \mathbf{J}_L)$ 上的连续映射.

证明 仅证 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 的连续性，$\psi(\cdot,\cdot)$ 的连续性类似可证. 为此，仅需证明任给 $I_*(G)$，$G \subseteq X$ 为强开集，以及 $H(x^*,\alpha)$，$x^* \in X^*$ 非零，$\alpha \in R$，$\varphi^{-1}(I_*(G))$ 与 $\varphi^{-1}(H(x^*,\alpha))$ 均是 $(\mathbf{P}_{fc}(X), \mathbf{J}_L) \times (\mathbf{P}_{fc}(X), \mathbf{J}_L)$ 中的开集. 任给 $(A,B) \in \varphi^{-1}(I_*(G))$，则 $\overline{\mathrm{co}}(A \cup B) \cap G \neq \varnothing$，从而依引理 1.3.3，$\mathrm{co}(A \cup B) \cap G \neq \varnothing$，则存在 $a \in A$，$b \in B$，以及 $\lambda \in [0,1]$，使得 $x = \lambda a + (1-\lambda)b \in G$. 取 $\varepsilon > 0$ 使得 $S(x,\varepsilon) \subset G$，由于

$$A \in I_*(S(a,\varepsilon)), B \in I_*(S,(b,\varepsilon))$$

从而 $(A,B) \in I_*(S(a,\varepsilon)) \times I_*(S(b,\varepsilon))$，但由 $x \in G$ 的取法易证

$$\varphi(I_*(S(a,\varepsilon)) \times I_*(S(b,\varepsilon))) \subset I_*(S(x,\varepsilon)) \subset I_*(G)$$

则知

$$(A,B) \in I_*(S(a,\varepsilon)) \times I_*(S(b,\varepsilon)) \subset \varphi^{-1}(I_*(G))$$

即(A,B)是$\varphi^{-1}(I_*(G))$的内点．由于(A,B)的任意性，即得$\varphi^{-1}(I_*(G))$为开集．对于$H(x^*,\alpha)$，由于显然有

$$\varphi^{-1}(H(x^*,\alpha)) = H(x^*,\alpha) \times H(x^*,\alpha)$$

即知$\varphi^{-1}(H(x^*,\alpha))$是$(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_l) \times (\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_l)$中的开集，定理得证．

［注］ 定1.3.23表明$\mathbf{P}_{fc}(X)$上的线性拓扑$\mathbf{J}_l$关于集合的并的闭凸包运算以及集合的加法运算是稳定的，而这一点也是将其称作线性拓扑的主要原因．超空间上其它类型的拓扑一般来说亦不具有这种性质，反例请参阅Beer[15].

定理 1.3.24 设X为Banach空间，则

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_c) &\subset (\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_M) \\ &\subset (\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_L) \\ &(\mathbf{P}_{fc}(X),\delta)\end{aligned}$$

证明 我们分三步依次证明上述三个包含关系：

(1) 由于Banach空间中强紧集必是弱紧集，由定义即可证得$(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_c) \subset (\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_M)$.

(2) 依定义仅需证明任给弱紧集$K \subset X$，$I^*(K^c)$是$(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_L)$中的开集．任给$A \in I^*(K^c)$，则$A \cap K = \varnothing$．对于任意$x \in K$，由凸集分离定理，存在$x^* \in X^*$及$\alpha_x \in R$，使得

$$\sup_{y\in A} < x^*,y > < \alpha_x << x^*,x >$$

令

$$M(x^*,x,\alpha_x)=\{y\in X,\langle x^*,y\rangle>\alpha_x\}$$

则 $M(x^*,x,\alpha_x)$ 是弱开集，且

$$K\subset\bigcup_{x\in K}M(x^*,x,\alpha_x)$$

于是，由 K 的弱紧性，存在有限个元素 $\{x_1,\cdots,x_n\}\subset K$，使

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{n}M(x_i^*,x_i,\alpha_{xi})$$

从而知 $A\in\bigcup_{i=1}^{n}H(x_i^*,\alpha_i)\subset I^*(K^c)$，即证 A 是 $I^*(K_n)$ 在线性拓扑 $\mathbf{J}_l$ 意义下的内点．由 $A\in I^*(K^c)$ 的任意性即可证明．

(3)　任给开集 $G\subseteq X$，依定理 1.3.14 知 $I_*(G)$ 是 $(\mathbf{P}_{fc}(X),\delta)$ 中的开集．任给非零的 $x^*\in X^*$，$\alpha\in R$ 下面证明 $H(x^*,\alpha)$ 也是 $(\mathbf{P}_{fc}(X),\delta)$ 中的开集，设 $A\in H(x^*,\alpha)$，依引理 1.3.4，存在 $\varepsilon>0$，使得

$$D(A+\varepsilon,L(x^*,\alpha))>\varepsilon$$

令 $S_H(A,\varepsilon)=\{C\in\mathbf{P}_{fc}(X),\delta(A,C)<\varepsilon\}$，则依 Hausdorff 距离的定义及引理 1.3.4 可知

$$S_H(A,\varepsilon)\subset H(x^*,\alpha)$$

因此 $A\in S_H(A,\varepsilon)$ 是 $H(x^*,\alpha)$ 在 $(\mathbf{P}_{fc}(X),\delta)$ 中的内点，依 $A\in H(x^*,\alpha)$ 的任意性即可证明．

§1.4　支撑函数与超空间 $\mathbf{P}_{bfc}(X)$

我们首先介绍一些有关凸函数的知识．

定义 1.4.1 设 $f:X \to \overline{R}$ 为广义实函数，记

$$\mathrm{dom} f = \{x \in X, f(x) < \infty\}$$

$$\mathrm{epi} f = \{(x,r) \in X \times R, r \geqslant f(x)\} \subset X \times R$$

称 $\mathrm{dom} f$ 为 f 的有效定义域，称 $\mathrm{epi} f$ 为 f 的图(epigraph)

定义 1.4.2 设 $f:X \to \overline{R} = (-\infty + \infty]$ 为广义实函数.

(1) 称 f 为凸函数，如果任给 $x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2);$$

(2) 称 f 为 τ 下半连续的，如果 $\mathrm{epi} f$ 为 $(X \times R, \tau \times \tau_1)$ 中的闭子集，其中 τ 为 X 上的一个拓扑，$\tau \times \tau_1$ 表示 τ 与 R 上通常意义拓扑 τ_1 的乘积拓扑.

定理 1.4.1 设 $f:X \to \overline{R}$，则下列命题等价：

(1) f 是凸函数；

(2) $\mathrm{epi} f$ 是 $X \times R$ 中的凸集；

(3) $\mathrm{dom} f$ 是 X 中凸集且 f 限制在 $\mathrm{dom} f$ 上是凸函数.

证明 依定义易证.

定理 1.4.2 设 $f:X \to R$，则 f 是 τ 下半连续的当且仅当任给 $x \in X$ 及 X 中定向列(net)$\{x_\delta, \delta \in D\}$，$(\tau)x_\delta \to x$，有

$$\liminf_{\delta \in D} f(x_\delta) \geqslant f(x)$$

证明 "充分性"，设 $(x,r) \in \overline{\mathrm{epi} f}^{\tau \times \tau_1}$，则存在定向列 $\{(x_\delta, r_\delta), \delta \in D\} \subset \mathrm{epi} f$，使 $(\tau \times \tau_1)(x_\delta, r_\delta) \to (x, r)$. 由于任给 $\delta \in D$，$(x_\delta, r_\delta) \in \mathrm{epi} f$，故 $f(x_\delta) \leqslant r_\delta$，从而有

$$f(x) \leqslant \liminf_{\delta \in D} f(x_\delta) \leqslant \lim_{\delta \in D} r_\delta = r$$

于是 $(x,r) \in \mathrm{epi} f$，即证 $\mathrm{epi} f$ 为闭集，从而 f 为 τ 下半连续的.

"必要性"　设 $x_0 \in X$,任取 $\varepsilon > 0$ 及定向列$\{x_\delta, \delta \in D\}$,$(\tau) x_\delta \to x_0$,由于$(\tau \times \tau_1)(x_\delta, f(x_0) - \varepsilon) \to (x_0, f(x_0) - \varepsilon)$,而$(x_0, f(x_0) - \varepsilon) \notin \mathrm{epi} f$,$\mathrm{epi} f$ 为闭集,故存在 $\Delta \in D$,使 $\delta \geqslant \Delta$ 时,$(x_\delta, f, (x_0) - \varepsilon) \notin \mathrm{epi} f$,即

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_\delta)$$

故有

$$\lim_{\delta \in D} \inf f(x_\delta) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$$

依 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知$\lim\limits_{\delta \in D} \inf f(x_\delta) \geqslant f(x_0)$

推论 1.4.1　设 $f: \Omega \to \overline{R}$ 为凸函数,则 f 是 s- 下半连续的当且仅当 f 是 w- 下半连续的.

证明　依 Mazur 定理,凸集 $\mathrm{epi} f$ 是强闭的当且仅当它是弱闭的,应用定理 1.4.2 即证.

定义 1.4.3　设 $f: X \to \overline{R}$ 为广义实函数,称由下式定义的函数 $f^*: X^* \to \overline{R}$ 为 f 的极函数.

$$f^*(x^*) = \sup\{< x^*, x > - f(x), x \in X\},$$
$$(x^* \in X^*)$$

容易证明极函数有如下性质:

(1)　若 $f \leqslant g$,则 $f^* \geqslant g^*$;

(2)　若 f 为 $A \subset X$ 的示性函数,即

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ +\infty, & x \notin A \end{cases}$$

则 $f^*(x^*) = \sup\{< x^*, x >, x \in A\} = \sigma(x^*, A)$(记号 $\sigma(x^*, A)$ 见定义 1.4.4).

定理1.4.3 设 $f:X \to \bar{R}$ 为凸下半连续函数，则

$$f(x) = \sup\{g(x), g(x) = \langle x^*, x \rangle - \alpha \text{ 且 } g \leqslant f\}$$

证明 (1) 首先证明存在具有形式 $g(x) = \langle x^*, x \rangle - \alpha$ 的实函数使得 $g \leqslant f$.

当 $f \equiv +\infty$ 时，是显然的. 假设存在 $x_0 \in X$，使 $f(x_0) < \infty$. 取 $r_0 \in R, r_0 < f(x_0)$，则 $(x_0, r_0) \notin \text{epi}f$. 依定理1.4.1及定理1.4.2，$\text{epi}f$ 为闭凸集，故依凸集分离定理，存在 $(x_0^*, \lambda_0) \in X^* \times R$，及 $\alpha_0 > 0$ 使任给 $(x,r) \in \text{epi}f$ 有

$$\langle x_0^*, x \rangle + \lambda_0 r \geqslant \alpha > \langle x_0^*, x_0 \rangle + \lambda_0 r_0 \quad (1.4.1)$$

特别地对于 $(x_0, f(x_0)) \in \text{epi}f$，依上式有 $\lambda_0 f(x_0) > \lambda_0 r_0$，由于 $f(x_0) > r_0$，故知 $\lambda_0 > 0$. 取 $g_1(x) = \frac{1}{\lambda_0}(-\langle x_0^*, x \rangle + \alpha_0)$，依(1.4.1)易证 $g_1 \leqslant f$.

(2) 下面仅需证明 $x_1 \in X$ 及 $r_1 < f(x_1)$，存在具有形式 $g(x) = \langle x^*, x \rangle + \alpha$ 的实函数，使得 $g(x_1) > r_1$ 即可.

由于 $(x_1, r_1) \notin \text{epi}f$，同(1)依凸集分离定理知存在 $\beta \in R$ 及 $(x_1^*, \lambda_1) \in X^* \times R$，使任给 $(x,r) \in \text{epi}f$，有

$$\langle x_1^*, x \rangle + \lambda_1 r \geqslant \beta > \langle x_1^*, x_1 \rangle + \lambda_1 r_1 \quad (1.4.2)$$

并且由 $\{x_1\} \times [f(x_1), +\infty) \subset \text{epi}f$ 可推得 $\lambda_1 \geqslant 0$. 依(1.4.2)，当 $\lambda_1 > 0$ 时，

$$f(x) \geqslant \frac{1}{\lambda}(-\langle x_1^*, x \rangle + \beta) \qquad (1.4.3)$$

当 $\lambda_1 = 0$ 时，有

$$\langle x_1^*, x \rangle \geqslant \beta > \langle x_1^*, x_1 \rangle \ (x \in \text{dom}f) \quad (1.4.4)$$

取$g(x)=g_1(x)+k(\beta-\langle x_1^*,x\rangle)$，$k\geqslant 0$，则$g(x)\leqslant f(x)$，并且不论$\lambda>0$还是$\lambda=0$，依(1.4.2)，(1.4.4)总存在充分大的$k>0$，使得$g(x_1)>r_1$.

综合(1)，(2)即证.

定理1.4.4 设$f:X\to\overline{R}$为凸下半连续的，f^*为其极函数，$f^{**}:X\to\overline{R}$定义作

$$f^{**}(x)=\sup\{\langle x^*,x\rangle-f^*(x^*),x^*\in X^*\}$$

则

$$f(x)=f^{**}(x).$$

证明 若$f(x)\equiv+\infty$，则易知$f^*(x^*)\equiv-\infty$，从而$f^{**}(x)=+\infty=f(x)$.

设至少存在一点$x\in X$，使$f(x)<+\infty$，则任给$x^*\in X^*$，$f^*(x^*)>-\infty$. 对于任给$x^*\in X^*$，$\alpha\in R$，易知函数$g(x)=\langle x^*,x\rangle-\alpha\leqslant f(x)$当且仅当任给$x\in X$，有

$$\langle x^*,x\rangle-\alpha\leqslant f(x) \tag{1.4.5}$$

而(1.4.5)等价于$\sup\{\langle x^*,x\rangle-f(x),x\in X\}\leqslant\alpha$，可以说存在$x^*(x^*)\leqslant\alpha$，于是

$$\begin{aligned}f(x)&=\sup\{g(x)=\langle x^*,x\rangle-\alpha,g\leqslant f\}\\&=\sup\{\langle x^*,x\rangle-f^*(x^*),x^*\in X^*\}\\&=f^{**}(x).\end{aligned}$$

定义1.4.4 设$A\subset X$，称由下式定义的广义实函数$\sigma(\cdot,A):X^*\to\overline{R}$为$A$的支撑函数：

$$\sigma(x^*,A)=\begin{cases}\sup\{\langle x^*,x\rangle,x\in A\},A\neq\varnothing\\-\infty,A=\varnothing\end{cases}$$

$$(x^* \in X^*)$$

定理 1.4.5 支撑函数有如下性质

(1) $\sigma(x^*, A) = \sigma(x^*, \mathrm{cl}A), A \subset X$;

(2) $\sigma(x^*, A+B) = \sigma(x^*, A) + \sigma(x^*, B), A, B \subset X$;

(3) $\sigma(x^*, \lambda A) = \lambda\sigma(x^*, A), A \subset X, \lambda \geqslant 0.$

证明 依定义显然.

定理 1.4.6 设 $A \in \mathrm{P}_f(X)$，则 $\sigma(x^*, A)$ 有如下性质:

(1) 正齐次性，即任给 $\lambda \geqslant 0, \sigma(\lambda x^*, A) = \lambda\sigma(x^*, A)$;

(2) $\sigma(x^*, A)$ 是 X^* 上的凸函数;

(3) $\sigma(x^*, A)$ 是 X^* 上的 w^*-下半连续函数.

证明 (1),(2) 显然，下证(3) 成立. 任取

$$\{(x_\delta^*, r_\delta), \delta \in D\} \subset \mathrm{epi}(\sigma(x^*, A))$$

$$(\sigma(X^*, X) \times \tau_1)(x_\delta^*, r_\delta) \to (x_0^*, r_0)$$

由于任给 $\delta \in D$, $(x_\delta^*, r_\delta) \in \mathrm{epi}(\sigma(x^*, A))$, 故 $r_\delta \geqslant \sigma(x_\delta^*, A)$. 依支撑函数定义，对于 x_0^* 及 $\epsilon \geqslant 0$，存在 $x \in A$，使得

$$\sigma(x_0^*, A) - \epsilon \leqslant \langle x_0^*, x \rangle \tag{1.4.6}$$

因为$(w^*)x_\delta^* \to x_0^*$，故有

$$\langle x_0^*, x \rangle = \lim_{\delta \in D} \langle x_\delta^*, x \rangle \leqslant \lim_{\delta \in D} \inf\sigma(x_\delta^*, A)$$

$$\leqslant \lim_{\delta \in D} r_\delta = r_0 \tag{1.4.7}$$

由(1.4.6)、(1.4.7) 及 $\epsilon \geqslant 0$ 的任意性知 $\sigma(x_0^*, A) \leqslant r_0$，即 $(x_0^*, r_0) \in \mathrm{epi}(\sigma(x^*, A))$，故 $\mathrm{epi}(\sigma(x^*, A))$ 为 $X^* \times R$ 上 $\sigma(X^*, X) \times \tau_1$ 闭集，从而 $\sigma(x^*, A)$ 是 w^*-下半连续的.

定理 1.4.7 任给 $A \in \mathbf{P}_{fc}(X)$,有

$$A = \bigcap_{x^* \in X^*} \{x \in X, \langle x^*, x\rangle \leqslant \varphi(x^*, A)\}$$

证明 设 $B = \bigcap\limits_{x^* \in X^*} \{x \in X, \langle x^*, x\rangle \leqslant \sigma(x^*, A)\}$,

若 $x \in A$,则任给 $x^* \in X^*$, $\langle x^*, x\rangle \leqslant \sigma(x^*, A)$,故 $x \in B$,从而知 $A \subset B$. 若 $x \notin A$,因为 $A \in \mathbf{P}_{fc}(X)$,故依凸集分离定理,存在 $x^* \in X^*$,使得 $\sigma(x^*, A) < \langle x^*, x\rangle$,故 $x^* \notin B$,从而有 $A \supset B$.

推论 1.4.1 (1) 设 $A, B \in \mathbf{P}_{fc}(X)$,则 $A \subset B$ 当且仅当任给 $x^* \in X^*$, $\sigma(x^*, A) \leqslant \sigma(x^*, B)$;

(2) 任给 $x \in X$, $x = 0$ 当且仅当 $\langle x^*, x\rangle = 0(x^*, \in X^*)$;

(3) 设 $A, B, C \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$,若 $A + B = A + C$,则 $B = C$.

证明 依定理 1.4.7 易证(1)、(2) 成立.

(3) 因为 $A, B, C \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$,故 $\sigma(x^*, A)$、$\sigma(x^*, B)$ 及 $\sigma(x^*, C)$ 均有限. 依定理 1.4.5(2),任给 $x^* \in X^*$,有

$$\begin{aligned}\sigma(x^*, B) &= \sigma(x^*, A + B) - \sigma(x^*, A) \\ &= \sigma(x^*, A + C) - \sigma(x^*, A) \\ &= \sigma(x^*, C)\end{aligned}$$

故依定理 1.4.7, $B = C$.

定理 1.4.8 设 $\Phi(x^*): X^* \to \bar{R}$ 为正齐次凸 w^*-下半连续函数,则存在 $A \in \mathbf{P}_{fc}(X)$,使得任给 $x^* \in X$,

$$\sigma(x^*, A) = \varphi(x^*)$$

证明 取$A=\bigcap_{x^*\in X^*}\{x\in X,<x^*,x>\leqslant\varphi(x^*)\}$，易知$A\in \mathbf{P}_{fc}(X)$，由于

$$\varphi^*(x)=\sup\{<x^*,x>-\varphi(x^*),x^*\in X^*\},$$

依$\varphi(x^*)$的正齐次性

$$\begin{aligned}2\varphi^*(x)&=\sup\{<2x^*,x>-\varphi(2x^*),2x^*\in X^*\}\\&=\varphi^*(x)\end{aligned}$$

故$\varphi^*(x)=0$或∞. 因为$\varphi^*(x)=0$当且仅当任给$x^*\in X^*$

$$<x^*,x>\leqslant\varphi(x^*)$$

故$A=\{x\in X,\varphi(x^*)=0\}$，即$\varphi^*(x)$为$A$的示性函数．依极函数的性质，有

$$\begin{aligned}\sigma(x^*,A)&=\sup\{<x^*,x>,x\in A\}\\&=\sup\{<x^*,x>-\varphi^*(x),x\in X\}\\&=\varphi^{**}(x)\end{aligned}$$

所以依定理1.4.4知$\sigma(x^*,A)=\varphi(x^*)$.

定理1.4.9 设$A\in \mathbf{P}_{fc}(X)$，$\sigma(\cdot,A)$为其支撑函数，则

(1) 若$A\in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，则任给$x_1^*,x_2^*\in X^*$，有

$$|\sigma(x_1^*,A)-\sigma(x_2^*,A)|\leqslant\|x_1^*-x_2^*\|\cdot\|A\|$$

特别地，$\sigma(\cdot,A)$是X^*上的强连续函数．

(2) 若$A\in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，则$\sigma(\cdot,A)$是X^*上$m(X^*,X)$连续函数．

(3) 若$A\in \mathbf{P}_{kc}(X)$，则$\sigma(\cdot,A)$是X^*上bw^*连续函数．

证明 (1) 不妨设$\sigma(x_1^*,A)\geqslant\sigma(x_2^*,A)$. 任给$\varepsilon>0$,依支撑函数的定义,存在$x_1\in A$,使得$<x_1^*,x>\geqslant\sigma(x_1^*,A)-\varepsilon$,但由于$<x_2^*,x_1>\leqslant\sigma(x_2^*,A)$,因此

$$\sigma(x_1^*,A)-\sigma(x_2^*,A)\leqslant<x_1^*-x_2^*,x_1>+\varepsilon$$

从而

$$\begin{aligned}|\sigma(x_1^*,A)-\sigma(x_2^*,A)|&\leqslant|<x_1^*-x_2^*,x_1>|+\varepsilon\\&\leqslant\|x_1^*-x_2^*\|\cdot\|x_1\|+\varepsilon\\&\leqslant\|x_1^*-x_2^*\|\cdot\|A\|+\varepsilon\end{aligned}$$

依$\varepsilon>0$的任意性即得.

(2) 类似于(1),任给$x_1^*,x_2^*\in X^*$,有

$$|\sigma(x_1^*,A)-\sigma(x_2^*,A)|\leqslant|\sup_{x\in A}<x_1^*-x_2^*,x>|$$

令$K=\overline{\text{co}}\{\lambda x,|\lambda|\leqslant A\}$,可证$K$为弱紧凸均衡子集,而由于$A\subset K$,则有

$$|\sigma(x_1^*,A)-\sigma(x_2^*,A)|\leqslant|\sup_{x\in K}<x_1^*-x_2^*,x>|$$

由于X^*上的 Mackey 拓扑就是在弱紧凸均衡集上一致收敛的拓扑,故知结论成立.

(3) 由于X^*上的bw^*拓扑就是在紧集上一致收敛的拓扑,依支撑函数的定义易证.

推论 1.4.2 设$A\in\mathbf{P}_{wkc}(X)$,$B\in\mathbf{P}_{wkc}(X)$. 如果$\{x_n^*,n\geqslant1\}$为X^*中 Mackey 拓扑$m(X^*,X)$意义的稠密子集,则$A\subset B$当且仅当任给$n\geqslant1$,$\sigma(x_n^*,A)\leqslant\sigma(x_n^*,B)$.

证明 综合定理 1.4.9(2),推论 1.4.1(1) 易得.

定理 1.4.10 设$x_0^*\in X^*$,$\alpha\in R$,$A=\{x\in X,<x_0^*,$

$x> \leqslant \alpha\}$，则

$$\sigma(x^*,A)=\begin{cases}k\alpha, & \text{若 } x^*=kx_0^*, k\geqslant 0\\ +\infty, & \text{其它}\end{cases}$$

证明　首先易证

$$\Phi(x^*,A)=\begin{cases}k\alpha, & \text{若 } x^*=kx_0^*, k\geqslant 0\\ +\infty, & \text{其它}\end{cases}$$

是 X^* 上正齐次 w^*- 下半连续的凸函数，再依定理 1.4.8 易证.

定理 1.4.11　设 $A,B\in \mathbf{P}_{b/c}(X)$，则

$$\delta(A,B)=\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\{|\sigma(x^*,A)-\sigma(x^*,B)|\}$$

证明　记 $\bar{\delta}(A,B)=\sup\limits_{\|x^*\|\leqslant 1}\{|\sigma(x^*,A)-\sigma(x^*,B)|\}$.

我们证明任给 $\varepsilon>0$，$\bar{\delta}(A,B)\leqslant\varepsilon$ 当且仅当 $\delta(A,B)\leqslant\varepsilon$.

依支撑函数的正齐次性知 $\varepsilon>0$，$\bar{\delta}(A,B)\leqslant\varepsilon$ 等价于

$$|\sigma(x^*,A)-\sigma(x^*,B)|\leqslant\|x^*\|\varepsilon, x^*\in X^* \quad (1.4.8)$$

但 $\|x^*\|=\sup\{<x^*,x>, \|x\|\leqslant 1\}=\sigma(x^*,\bar{S}(0,1))$，故(1.4.8) 等价于对任意 $x^*\in X^*$，有

$$|\sigma(x^*,A)-\sigma(x^*,B)|\leqslant\varepsilon\sigma(x^*,\bar{S}(0,1)) \quad (1.4.9)$$

依定理 1.4.5(2) 及推论 1.4.1，(1.4.9) 等价于任给 $\varepsilon>0$，

$$A\subset B+\varepsilon\bar{S}(0,1) \text{ 且 } B\subset A+\varepsilon\bar{S}(0,1) \quad (1.4.10)$$

再依定理 1.2.5，综合(1.4.8)—(1.4.10) 知任给 $\varepsilon>0$，有

$$\bar{\delta}(A,B)\leqslant\varepsilon \text{ 等价于 } \delta(A,B)\leqslant\varepsilon \quad (1.4.11)$$

由(1.4.11) 易知 $\delta(A,B)=\bar{\delta}(A,B)$.

推论 1.4.3　设 $A,B\in \mathbf{P}_{b/c}(X)$，则

$$\delta_u(A,B) = \max(0, \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} (\sigma(x^*,B) - \sigma(x^*,A)))$$

$$\delta_l(A,B) = \max(0, \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} (\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,B)))$$

证明 仅需证明第一个等式，第二个等式类似可证.

首先令 $\max(0, \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} (\sigma(x^*,B) - \sigma(x^*,A))) = \overline{\delta_u}(A,B)$. 如果 $B \subset A$. 则由定理 1.2.5 及其注可知 $\delta_u(A,B) = 0$，且由于此时任给 $x^* \in X^*$，恒有 $\sigma(x^*,B) - \sigma(x^*,A) \leqslant 0$，故知 $\overline{\delta_u}(A,B) = \delta_u(A,B) = 0$. 因此，不妨假设 $B \cap A^c \neq \varnothing$，则依凸集分离定理可知必存在 $x^* \in X^*$，$\| x^* \| \leqslant 1$，使得 $\sigma(x_0^*, B) - \sigma(x_0^*, A) > 0$，因而

$$\sup_{\|x^*\| \leqslant 1} (\sigma(x^*,B) - \sigma(x^*,A)) > 0$$

所以 $\overline{\delta_u}(A,B) = \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} (\sigma(x^*,B) - \sigma(x^*,A))$. 接下去的证明与定理 1.4.11 完全类似.

推论 1.4.4 设 $\{A,B,C,D\} \subset \mathbf{P}_{bfc}(X)$，则

$$\delta(A+B, C+D) \leqslant \delta(A,C) + \delta(B,D)$$

证明 依定理 1.4.11 易证.

定义 1.4.5 称 $K \subset X^*$ 为等度连续集，如果任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $\| x_1 - x_2 \| < \delta$ 时，任给 $x^* \in K$，有

$$|x^*(x_1 - x_2)| < \varepsilon$$

记 $\mathbf{H} = \{\varphi: X^* \to R, \varphi$ 是正齐次的，且任给等度连续的集合 $K \subset X^*$，φ 限制在 K 上连续且有界$\}$，$\mathbf{H}_0 = \{\varphi \in H, \varphi$ 是凸的 w^*-下半连续的$\}$.

定理 1.4.12 在 $\mathbf{H}$ 上定义加法，数乘及范数如下：

$$(\varphi_1+\varphi_2)(x^*)=\varphi_1(x^*)+\varphi_2(x^*)$$
$$(\lambda\varphi)(x^*)=\lambda\varphi(x^*)$$
$$\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(x^*)|,\|x^*\|\leqslant 1\}$$
则 $\mathbf{H}$ 为一 Banach 空间.

证明 易证 $\mathbf{H}$ 为一赋范线性空间. 下证 $\mathbf{H}$ 关于上述范数完备. 任给 $\{\varphi_n,n\geqslant 1\}\subset\mathbf{H}$ 为 Cauchy 列,令
$$\varphi(x^*)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x^*)$$
($x^*\in X^*$,φ_n 在 $\|x^*\|\leqslant 1$ 上一致收敛于 φ). 则 $\varphi(x^*)$ 显然是正齐次的. 对于任意等度连续集 $K\subset X^*$,由于等度连续集是强有界的,故
$$\begin{aligned}&\sup\{|\varphi(x^*)|,x^*\in K\}\\=&\sup\{\|x^*\|\,|\varphi(\frac{x^*}{\|x^*\|})|,x^*\in K\}\\\leqslant&\|K\|\sup\{\varphi(x^*),\|x^*\|\leqslant 1\}<\infty\end{aligned}$$
$\varphi(x^*)$ 在 K 上有界. 由于 $x_1^*,x_2^*\in K$,
$$\begin{aligned}|\varphi(x_1^*)-\varphi(x_2^*)|\leqslant&|\,\|x_1^*\|\varphi(\frac{x_1^*}{\|x_1^*\|})-\|x_2^*\|\\&+\varphi(\frac{x^*}{\|x_2^*\|})|\end{aligned}$$
所以 $\varphi(x^*)$ 在 K 上强连续. 因此,$\varphi\in\mathbf{H}$,从而 $\mathbf{H}$ 为 Banach 空间.

定理 1.4.13 $\mathbf{H}_0$ 为 $\mathbf{H}$ 的闭凸锥,且由 $\mathbf{P}_{bfc}(X)$,到 $\mathbf{H}_0$ 的映射
$$i(A)=\sigma(\cdot,A),A\in\mathbf{P}_{bfc}(X)$$

满足

(1) $i: \mathbf{P}_{bfc}(X) \to \mathbf{H}_0$ 是一一的映上的;

(2) $i(A+B) = i(A) + i(B)$;

(3) $i(\lambda A) = \lambda i(A), \lambda \geqslant 0$;

(4) $i(\cdot)$ 是 $\mathbf{P}_{bfc}(X)$ 到 $\mathbf{H}_0$ 上的同胚映射.

证明 (1) 由定理1.4.6、定理1.4.8 即知 $i(\cdot)$ 是一一的映上的.(2),(3) 由定理 1.4.5 即证.

(4) 由于任给 $A,B \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$,依定理 1.4.11 有

$$\delta(A,B) = \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} |\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,B)|$$
$$= \|i(A) - i(B)\| \tag{1.4.12}$$

所以 $i: \mathbf{P}_{bfc}(X) \to \mathbf{H}_0$ 是连续的,从而是同胚映射.

最后证明 $\mathbf{H}_0$ 是 $\mathbf{H}$ 的闭凸锥. $\mathbf{H}_0$ 显然是凸的. 假设 $\{i(A_n), n \geqslant 1\} \subset \mathbf{H}_0$ 为 Cauchy 列,由(1.4.12) 知 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 为 $(\mathbf{P}_{bfc}(X), \delta)$ Cauchy 列,从而存在 $A \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$,使 $\delta(A_n, A) \to 0$,从而知 $i(A) \in \mathbf{H}_0$,且

$$\|i(A_n) - i(A)\| \to 0$$

所以 $\mathbf{H}_0$ 是闭的.

§1.5 超空间上的收敛性

本节研究超空间 $\mathbf{P}_f(X)$ 上集列的各种收敛性及其关系.

定义 1.5.1 设 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_f(X)$, $A \in \mathbf{P}_f(X)$.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(A_n, A)$,则称 $\{A_n\}$ Hausdorff 收敛到 A,记作

$A_n \xrightarrow{\delta} A$，或$(\delta)A_n \to A$.

(2)　若任给$r>0$，$\varepsilon>0$，存在$N\geqslant 1$，使得$n\geqslant N$时，恒有$A\cap S(0,r)\subset A_n+\varepsilon$且$A_n\cap \bar{S}(0,r)\subset A+\varepsilon$，则称$\{A_n\}r$-收敛到$A$，记作$A_n \xrightarrow{r} A$，或$(r)A_n\to A$.

定义 1.5.2　设$\{A_n\}\subset \mathbf{P}_f(X)$，$A\in \mathbf{P}_f(X)$.

(1)　若任给$x^*\in X^*$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(x^*,A_n)=\sigma(x,A)$，则称$\{A_n\}$弱收敛到$A$，记作$A_n \xrightarrow{w} A$，或$(\mathrm{w})A_n\to A$.

(2)　若任给$x\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}d(x,A_n)=d(x,A)$，则称$\{A_n\}$Wijsman 收敛到$A$，记作$A_n \xrightarrow{\mathrm{wijs}} A$，或$(\mathrm{Wijs})A_n\to A$.

(3)　若同时有$A_n \xrightarrow{w} A$，$A_n \xrightarrow{wijs} A$，则称$\{A_n\}\mathbf{J}_L$-收敛到A，记作$A_n \xrightarrow{\mathbf{J}_L} A$，或$(\mathbf{J}_L)A_n\to A$.

定理 1.5.1　设$\{A_n,A\}\subset \mathbf{P}_f(X)$，若$(\delta)A_n\to A$，则$A_n\to A$.

证明　若$(\delta)A_n\to A$，依定理 1.2.5(1)，任给$\varepsilon>0$，存在$N\geqslant 1$，使得$n\geqslant N$时，$A\subset A_n+\varepsilon$且$A_n\subset A+\varepsilon$. 但对于任给$r>0$，显然有$A\cap\bar{S}(0,r)\subset A$及$A_n\cap\bar{S}(0,r)\subset A_n$，故知$(r)A_n\to A$.

定理 1.5.2　设$\{A_n,A\}\subset \mathbf{P}_f(X)$，则$(\delta)A_n\to A$当且仅当$\{d(x,A_n),n\geqslant 1\}$在$x\in X$上一致收敛到$d(x,A)$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X}|d(x,A)-d(x,A_n)|=0$.

证明　由定理 1.2.5(2) 即可证明.

定理 1.5.3 设$\{A_n, A\} \subset \mathbf{P}_f(X)$,则下列命题等价:

(1) $(r)A_n \to A$;

(2) 任给有界集$K \subset X$,$\{d(x,A_n), n \geqslant 1\}$在$x \in K$上一致收敛到$d(x,A)$.

证明 "(1)⇒(2)"仅需证明任给$r > 0$,$\{d(x,A_n), n \geqslant 1\}$在$x \in \bar{S}(0,r)$上一致收敛到$d(x,A)$. 不失一般性,可设$r > d(0,A)$,依$r$-收敛的定义可证存在$N_1 \geqslant 1$,使得$n \geqslant N_1$时,

$$A_n \cap \bar{S}(0,r) \neq \varnothing$$

$$A \cap \bar{S}(0,r) \neq \varnothing$$

任给$\varepsilon > 0$,令$\bar{r} > 3r + \frac{\varepsilon}{2}$,由于$(r)A_n \to A$,故存在$N \geqslant N_1$,使得$n \geqslant N$时,$A \cap \bar{S}(0,\bar{r}) \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$且$A_n \cap \bar{S}(0,\bar{r}) \subset A + \frac{\varepsilon}{2}$. 任给$x \in \bar{S}(0,r)$,依距离函数的定义知$n \geqslant N \geqslant N_1$时必有

$$d(x,A_n) \leqslant \|x\| + d(0,A_n) < 2r$$

取$y_n \in A_n$,使得$\|x - y_n\| < d(x,A_n) + \frac{\varepsilon}{2} (n \geqslant 1)$,则

$$\begin{aligned}\|y_n\| &\leqslant \|x\| + \|x - y_n\| \\ &< r + d(x,A_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< 3r + \frac{\varepsilon}{2} < \bar{r}\end{aligned}$$

但由于$n \geqslant N$时,$A_n \cap \bar{S}(0,\bar{r}) \subset A + \frac{\varepsilon}{2}$,因此存在$z_n \in A$使

得 $\|y_n - z_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$d(x,A) \leqslant \|x - z_n\| \leqslant \|x - y_n\| + \|y_n - z_n\|$$
$$< d(x,A_n) + \varepsilon$$

同理可证 $n \geqslant N$ 时，$d(x,A_n) < d(x,A) + \varepsilon$. 依 $x \in \overline{S}(0,r)$ 的任意性即知 $n \geqslant N$ 时有

$$\sup_{x \in \overline{S}(0,r)} |d(x,A_n) - d(x,A)| < \varepsilon$$

从而(2) 成立.

"(2)⇒(1)" 任给 $\varepsilon > 0, r > 0$. 依(2) 知存在 $N \geqslant 1$，使 $n \geqslant N$ 时，$\sup_{x \in \overline{S}(0,r)} |d(x,A_n) - d(x,A)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 任给 $x \in A \cap \overline{S}(0,r)$，由于 $d(x,A) = 0$，故 $d(x,A_n) < \frac{\varepsilon}{2}(n \geqslant N)$. 于是，存在 $x_n \in A_n$ 使得

$$\|x - x_n\| < d(x,A_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

即 $x \in A_n + \varepsilon$，从而知 $n \geqslant N$ 时，

$$A \cap \overline{S}(0,r) \subset A_n + \varepsilon$$

同理可证 $n \geqslant N$ 时，$A_n \cap \overline{S}(0,r) \subset A + \varepsilon$，因此有 $(r)A_n \to A$.

定理 1.5.4 设 $\{A_n, A\} \subset \mathbf{P}_f(X)$，则下列命题等价：

(1) $(r)A_n \to A$，且存在 $N_0 \geqslant 1$，使得 $\bigcup_{n \geqslant N_0} A_n$ 有界；

(2) $(\delta)A_n \to A$，且 A 有界.

证明 "(1)⇒(2)" 由于 $(r)A_n \to A$，故任给 $r > 0, \varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant N_0$，使得 $n \geqslant N$ 时，$A \cap \overline{S}(0,r) \subset A_n + \varepsilon$，因此

$$A = \bigcup_{r>0}(A \cap \bar{S}(0,r)) \subset (\bigcup_{n\geqslant N_0} A_n) + \varepsilon$$

即 A 有界. 取

$$r_1 > \max(\|A\|, \|\bigcup_{n\geqslant N_0} A_n\|)$$

则 $n \geqslant N_0$ 时，$A = A \cap \bar{S}(0,r_1)$ 且 $A_n = A_n \cap \bar{S}(0,r_1)$. 但依 r- 收敛的定义知对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \geqslant N_0$，使得 $n \geqslant N_1$ 时，有

$$A = A \cap \bar{S}(0,r_1) \subset A_n + \varepsilon$$

$$A_n = A_n \cap \bar{S}(0,r_1) \subset A + \varepsilon$$

所以，$(\delta)A_n \to A$.

"(2)⇒(1)" 若 $(\delta)A_n \to A$，由定理 1.5.1 知 $(r)A_n \to A$. 依假设知 A 有界，故由 Hausdorff 收敛的定义，易证存在 $N_0 \geqslant 1$，使得 $\bigcup_{n\geqslant N_0} A_n$ 有界.

定理 1.5.5 设 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{bfc}(X)$，$A \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，且 $(\delta)A_n \to A$，则

$$(w)A_n \to A$$

证明 任给 $x_0^* \in X^*$，依支撑函数的性质及定理 1.4.11 有

$$\begin{aligned}
&|\sigma(x_0^*, A_n) - \sigma(x_0^*, A)| \\
&= \|x_0^*\| \, |\sigma(\frac{x_0^*}{\|x_0^*\|}, A_n) - \sigma(\frac{x_0^*}{\|x_0^*\|}, A)| \\
&\leqslant \|x_0^*\| \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} |\sigma(x^*, A_n) - \sigma(x^*, A)| \\
&= \|x_0^*\| \cdot \delta(A_n, A)
\end{aligned}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\delta(A_n,A)=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(A_0^*,A_n)=\sigma(x^*,A)$，从而定理得证．

定理 1.5.6 设$\{A_n\}\subset \mathbf{P}_{bfc}(X)$，若对于任意的$K\in \mathbf{P}_b(X^*)$，$\{\sigma(x^*,A_n)\}$在$K$上一致收敛到$\sigma(x^*,A)$，则

$$(\delta)A_n\to A$$

证明 依定理1.4.11知

$$\delta(A_n,A)=\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}|\sigma(x^*,A_n)-\sigma(x^*,A)|$$

但由于$\{x^*,\|x^*\|\leqslant 1\}\in \mathbf{P}_b(X^*)$，故依定理条件可得$(\delta)A_n\to A$.

定理 1.5.7 设$\{A_n,A\}\subset \mathbf{P}_{bfc}(X)$，若$(\delta)A_n\to A$，则

$$(\mathbf{J}_L)A_n\to A$$

证明 若$(\delta)A_n\to A$，由定理1.5.2知$(\mathrm{wijs})A_n\to A$. 而由定理1.5.5知$(w)A_n\to A$，因此有$(\mathbf{J}_L)A_n\to A$.

定理 1.5.8 设$\{A_n,A\}\subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，则下列命题等价

(1) $(\mathbf{J}_L)A_n\to A$;

(2) $\{A_n\}$在线性拓扑$(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_L)$，意义下收敛到$A$.

证明 “(1)⇒(2)”仅需证明当n充分大时，任意包含A的子基本开集也包含A_n，任给开集$G\subseteq X$使得$A\in I_*(G)$，取$x\in A\cap G$及$\epsilon>0$，使得$S(x,\epsilon)<\epsilon$，从而必有$A_n\in I^*(G)(n\geqslant N)$. 任给非零的$x^*\in X^*$及$\alpha\in R$，使得$A\in H(x^*,\alpha)$，则知$\sigma(x^*,A)<\alpha$，但由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(x^*,A_n)=\sigma(x^*,A)$，从而存在$N\geqslant 1$，使得$n\geqslant N$时，$\sigma(x^*,A_n)<\alpha$，即$A_n\in H(x^*,\alpha)$.

“(2)⇒(1)” 首先证明$(\mathrm{wijs})A_n\to A$. 任给$x\in X$，$\epsilon>$

0，设 $d(x,A)=\alpha$，由于 $A\cap S(x,\alpha+\varepsilon)\neq\varnothing$，即 $A\in I_*(S(x,\alpha-\varepsilon))$，依(2)中所给定的有条件可知，存在 $N\geqslant 1$，使得 $n\geqslant N$ 时，我们必然有 $A_n\in I_*(S(x,\alpha+\varepsilon))$，即 $A_n\cap S(x,\alpha+\varepsilon)\neq\varnothing$，从而 $d(x,A_n)\leqslant\alpha+\varepsilon=d(x,A)+\varepsilon$，由 $\varepsilon>0$ 的任意性可得

$$\limsup_{n\to\infty} d(x,A_n)\leqslant d(x,A)$$

另一方面，由于 $x\in A$ 时有 $d(x,A)=0$，而 $d(x,A_n)\geqslant 0(n\geqslant 1)$，从而必有 $\liminf\limits_{n\to\infty} d(x,A_n)\geqslant d(x,A)$. 因此，不妨设 $x\notin A$，令 $\alpha=d(x,A)$，任取 $0<\varepsilon<\alpha$，则

$$(A+\frac{\varepsilon}{2})\cap S(x,\alpha-\varepsilon)=\varnothing$$

于是存在非零的 $x^*\in X^*$ 及 $\beta\in R$，使得

$$\sigma(x^*,A+\frac{\varepsilon}{2})\leqslant\beta$$

$$\leqslant\inf\{<x^*,y>,y\in S(x,\alpha-\varepsilon)\},$$

则知 $A\in H(x^*,\beta)$，从而依引理 1.3.4 知

$$d(x,A_n)>\alpha-\varepsilon=d(x,A)-\varepsilon(n\geqslant N).$$

依 $\varepsilon>0$ 的任意性可得

$$\liminf_{n\to\infty} d(x,A_n)\geqslant d(x,A)$$

综上所述，任给 $x\in X$，恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,A_n)=d(x,A)$，即

$$(\mathrm{wijs})A_n\to A$$

其次，我们证明 $(w)A_n\to A$. 若 $x^*\in X^*$ 为零元素，

$\sigma(x^*,A),\sigma(x^*,A_n)(n\geqslant 1)$ 为零. 不妨设 $x^*\in X^*$ 非零. 令 $\alpha=\sigma(x^*,A)$，对于任给 $\varepsilon>0$，由于 $A\in H(x^*,\alpha+\varepsilon)$，因此，存在 $N>1$，使得 $n\geqslant N$ 时 $A_n\in H(x^*,\alpha+\varepsilon)$，即 $\sigma(x^*,A_n)\leqslant\sigma(x^*,A)+\varepsilon$，依 $\varepsilon>0$ 的任意性可得

$$\limsup_{n\to\infty}\sigma(x^*,A_n)\leqslant\sigma(x^*,A)$$

另一方面，任给 $\varepsilon>0$，依支撑函数的定义必存在 $x\in A$，使得 $<x^*,x>>\alpha-\varepsilon$. 由于 $A\cap S(x,\frac{\varepsilon}{\|x^*\|})\neq\varnothing$，因此存在 $N\geqslant 1$，使得 $n\geqslant N$ 时，$A_n\cap S(x,\frac{\varepsilon}{\|x^*\|})\neq\varnothing$. 因此对于任意固定的 $n\geqslant N$，必存在 $x_n\in A_n$，使得

$$\|x_n-x\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\|x^*\|}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\sigma(x^*,A_n)\geqslant<x^*,x_n>\\=&<x^*,x>-<x^*,x-x_n>\\&\geqslant<x^*,x>-\|x^*\|\cdot\|x-x_n\|\\&><x^*,x>-\varepsilon>\alpha-2\varepsilon\end{aligned}$$

依 $\varepsilon>0$ 的任意性可知

$$\liminf_{n\to\infty}\sigma(x^*,A_n)\geqslant\sigma(x^*,A)$$

因此，任给 $x^*\in X^*$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(x^*,A_n)=\sigma(x^*,A)$ 即 $(w)A_n\to A$.

定义 1.5.3 设 $\{A_n\}\subset\mathbf{P}_f(X)$，记

$$s\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n=\{x,\text{存在 } x_n\in A_n,\text{使}(s)x_n\to x\}$$

$$w\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x, \text{存在 } x_n \in A_n, \text{使}(w) x_n \to x\}$$

$$s\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x, \text{存在 } x_{n_i} \in A_{n_i}, \text{使}(s) x_{n_i} \to x\}$$

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x, \text{存在 } x_{n_i} \in A_{n_i}, \text{使}(w) x_{n_i} \to x\}$$

定理 1.5.9 对于$\{A_n\} \in \mathbf{P}_f(X)$，以下性质成立

(1) $s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset w\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$；

(2) $s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset s\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \subset w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

证明 依定义显然.

定义 1.5.4 设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_f(X)$，$A \in \mathbf{P}_f(X)$，

(1) 若 $s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = s\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A$，则称$\{A_n\}$Kuratowski 收敛到 A，记作

$$(K) A_n \to A.$$

(2) 若 $w\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A$，那么就称$\{A_n\}$Mosco 收敛到 A，记作$(M) A_n \to A$.

(3) 若 $s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A$，则称$\{A_n\}$Kuratowski-Mosco 收敛到 A，记作$(K.M) A_n \to A$.

定理 1.5.10 设$\{A_n, A\} \subset \mathbf{P}_f(X)$，若$(K.M) A_n \to A$，则$(K) A_n \to A$ 且$(M) A_n \to A$.

证明 依定理 1.5.9 易证.

定理 1.5.11 设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_f(X)$，则

(1) $s\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \overline{(\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m)}$，

(2) $s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{H} \overline{(\bigcup\limits_{m\in H} A_m)}$，

其中 H 表示$\{1,2\cdots\}$的任意共尾子列，即 H 满足任给 $n\geqslant 1$，存在 $m_n\in H$，使得 $m_n\geqslant n$.

证明 (1) 依 $s\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 的定义知 $x\in s\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 当且仅当任给 $n\geqslant 1$，$x\in\overline{\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_n}$，故

$$s\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{n\geqslant 1}\overline{(\bigcup_{m\geqslant n} A_m)}.$$

(2) 假设 $x\in s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$，则存在点列$\{x_n\}$，$x_n\in A_n$，使得 $(s)x_n\to x$，于是对$\{1,2,\cdots\}$的任意共尾子列 H 有 $(s)x_m\to x(m\in H)$，即 $x\in\overline{(\bigcup\limits_{m\in H} A_m)}$，故

$$s\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n\subset\bigcap_{H}\overline{(\bigcup_{m\in H} A_m)}.$$

反之，若 $x\notin s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$，依定义知存在 $\varepsilon>0$，使得任给 $n\geqslant 1$，存在 $m_n\geqslant n$，且 $d(x,A_{m_n})>\varepsilon$ 取 $H=\{m_n,n\geqslant 1\}$，那么有 H 使有为$\{1,2,\cdots\}$的共尾子列，且 $x\notin\overline{\bigcup\limits_{m\in H} A_m}$，从而 $x\notin\bigcap\limits_{H}\overline{(\bigcup\limits_{m\in H} A_m)}$，因此

$$s\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n\supset\bigcap_{H}\overline{(\bigcup_{m\in H} A_m)}.$$

综合上述论证即得

$$s\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{H}\overline{(\bigcup_{m\in H} A_m)}.$$

推论 1.5.1 设$\{A_n\}\subset\mathbf{P}_f(X)$，$A\in\mathbf{P}_f(X)$，则

(1) $s\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$，$s\text{-}\liminf A_n$ 均为 X 上闭集，

(2) 若 $A_n=A(n\geqslant 1)$，则$(K)A_n\to A$.

由定理 1.5.11 及其推论可以看到集列的强上、下极限具有很好的性质，但弱上、下极限相对来说就差一些，下面我们

集中讨论弱上、下极限的性质，称集列$\{A_n\}$具有有界（弱紧，局部弱紧）控制，如果存在$H \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，（相应地，$G \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，$R \in \mathbf{P}_{lwkc}(X)$），使对$n \geq 1$，$A_n \subset H$（相应地，$A_n \subset G$，$A_n \subset R$）. 显然，集列具有有界控制等价于$\sup\limits_{n\geq 1} \| A_n \| < +\infty$. 当$X$为自反Banach空间时，具有局部弱紧控制这一条件自然满足，而具有弱紧控制等价于具有有界控制.

定理 1.5.12 设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，令$r = \lim\limits_{n\to\infty} \inf d(0, A_n)$，

(1) 若$w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n \neq \varnothing$，则$r < +\infty$；

(2) 若$r < +\infty$，且$\{A_n\}$具有局部弱紧控制，则

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty} \sup A_n \neq \varnothing.$$

证明 (1) 任取$x \in w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n \neq \varnothing$，存在$x_k \in A_{n_k}$($k \geq 1$)，使得$(w)x_k \to x (k \to \infty)$. 由于弱收敛点列必强有界，依距离函数的定义可知$\sup\limits_{k\geq 1}(0, A_{n_k}) \leq \sup\limits_{k\geq 1} \| x_k \| < +\infty$，由实数列下极限的性质易知$r \leq \sup\limits_{k\geq 1} d(0, A_{n_k} < +\infty$.

(2) 若$r < +\infty$，则必存在$\{A_{n_k}, k \geq 1\}$，使$\sup\limits_{k\geq 1} d(0, A_{n_k}) \leq r + 1$，于是

$$A_{n_k} \cap \bar{S}(0, r+1) \neq \varnothing (k \geq 1)$$

取$x_k \in A_{n_k} \cap \bar{S}(0, r+1)$，由于$\{A_n\}$具有局部弱紧控制，则存在$R \in \mathbf{P}_{lwkc}(X)$，使得

$$\{x_k, k \geq 1\} \subset R \cap \bar{S}(0, r+1) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$$

因此存在$\{x_{k_i}, i \geq 1\} \subset \{x_k, k \geq 1\}$使得$(w)x_{k_i} \to x (i \to \infty)$，而显然有$x \in w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$，定理得证.

定理 1.5.13 设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，$A \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，若任意给定$x^* \in X^*$，$\limsup\limits_{n\to\infty} \sigma(x^*, A_n) \leqslant \sigma(x^*, A)$，则

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A.$$

证明 任给$x \in w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$，存在$x_k \in A_{n_k}(k \geqslant 1)$，使得$(w)x_k \to x$，从而任给$x^* \in X^*$

$$< x^*, x > = \limsup_{n\to\infty} < x^*, x_n >$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \sigma(x^*, A_n) \leqslant \sigma(x^*, A)$$

则$x \in A$，定理得证.

定理 1.5.14 设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，具有弱紧控制.

(1) $w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathbf{P}_{kw}(X)$，且任给$x^* \in X^*$，

$$\liminf_{n\to\infty} \sigma(x^*, A_n) \leqslant \sigma(x^*, w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

(2) 若$w\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \neq \varnothing$，则$w\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，且任给$x^* \in X^*$，有

$$\sigma(x^*, w\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sigma(x^*, A_n)$$

证明 由于$\{A_n\}$具有弱紧控制，则存在$G \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，使得$A_n \subset G(n \geqslant 1)$.

(1) 由定理1.5.12知$w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \neq \varnothing$. 由于$X$上的弱拓扑限制在弱紧集$G$上是可度量化的，故类似于定理1.5.11的证明可知

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{cl}_w(\bigcup_{m\geqslant n} A_m) \subset G$$

从而$w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathbf{P}_{wk}(X)$，任给$x^* \in X^*$，由定理假设

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sigma(x^*,A_n)\leqslant\sigma(x^*,G)<\infty$$

现任给$\{\sigma(x^*,A_n),n\geqslant 1\}$的收敛子列$\{\sigma(x^*,A_{nk}),k\geqslant 1\}$，由于$A_n\subset G_n(n\geqslant 1)$，故存在$x_k\in A_{nk}$使得$\sigma(x^*,A_{nk})=<x^*,x_k>(k\geqslant 1)$. 因为$\{x_k,k\geqslant 1\}\subset G$，故存在弱收敛子列$(w)x_{ki}\to x(i\to\infty)$，$x\in w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n$，因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,A_{nk})\\&=\lim_{n\to\infty}<x^*,x_{ki}>\\&=<x^*,x>\\&\leqslant\sigma(x^*,w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n)\end{aligned}$$

由$\{\sigma(x^*,A_{nk}),k\geqslant 1\}$的任意性即知

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sigma(x^*,A_n)\leqslant\sigma(x^*,w\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf A_n)$$

(2) 类似于(1)及定理1.5.11，可证

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf A_n\in\mathbf{P}_{wk}(X)$$

任给$x^*\in X^*$，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$x_0\in w\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf A_n$，使得

$$\begin{aligned}&\sigma(x^*,w\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf A_n)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant<x^*,x_0>\\&\leqslant\sigma(x^*,w\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf A_n)-\frac{\varepsilon}{2}\\&\leqslant<x^*,x_0>\\&\leqslant\sigma(x^*,w\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf A_n)\end{aligned}$$

由于存在$x_n\in A_n(n\geqslant 1)$，使得$(w)x_n\to x_0$，故存在$N\geqslant 1$，使

得 $n \geqslant N$ 时，有

$$< x^*, x_0 > - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant < x^*, x_n > \leqslant \sigma(x^*, A_n)$$

从而

$$\alpha - \varepsilon \leqslant < x^*, x_n > \leqslant \sigma(x^*, A_n)$$

于是有$\liminf\limits_{n\to\infty} \sigma(x^*, A_n) \geqslant \sigma(x^*, w\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n) - \varepsilon$，由 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得

$$\liminf_{n\to\infty} \sigma(x^*, A_n) \geqslant \sigma(x^*, w\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n)$$

定理 1.5.15 设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，$A \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，且$\{A_n\}$具有弱紧控制，若$(w)A_n \to A$，则 $A = \overline{\mathrm{co}}(w\text{-}\limsup A_n)$

证明 任给 $x^* \in X^*$，依定理 1.5.14 知

$$\sigma(x^*, A) = \lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, A_n) \leqslant \sigma(x^*, w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

从而 $A \subset \overline{\mathrm{co}}(w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)$. 依定理 1.5.13 知

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$$

从而$\overline{\mathrm{co}}(w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) \subset A$. 定理得证.

定理 1.5.16 设$\{A_n\}$，$\{B_n\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$ 均具有局部弱紧控制，$\liminf\limits_{n\to\infty} d(0, A_n) < \infty$，$\liminf d(0, B_n) < \infty$，则

$$\delta(\mathrm{cl}(w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n), \mathrm{cl}(w\text{-}\limsup_{n\to\infty} B_n))$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \delta(A_n, B_n)$$

证明 不妨设$\limsup\limits_{n\to\infty} \delta(A_n, B_n) < \infty$. 由定理 1.5.12 可以证得 $w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$，$w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} B_n$ 均非空，令 $R \in \mathbf{P}_{kwkc}(X)$，使得 $A_n \subset R$，$B_n \subset R (n \geqslant 1)$，对于任意 $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$，存在 x_k

$\in A_{nk}$，使得$(w)x_k \to x(k\to\infty)$，则$\sup\limits_{k\geqslant 1}\|y_k\| < \infty$. 对于任意的$k\geqslant 1$，取$y_k\in B_{nk}$，使得

$$\|x_k - y_k\| \leqslant \delta(A_{nk},B_{nk}) + \frac{1}{k}$$

则$\sup\limits_{k\geqslant 1}\|y_k\| < \infty$，设$a = \sup\limits_{k\geqslant 1}\|y_k\|$，则

$$\{y_n\} \subset R \cap \bar{S}(0,a) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$$

从而存在弱收敛子列$\{y_{ki}\}\subset\{y_k\}$，使得

$$(w)y_{ki} \to y \in w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup B_n.$$

因此依Banach空间中范数的弱下半连续性，有

$$d(x,\text{cl}(w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup B_n)) \leqslant \|x - y\|$$

$$<< \lim_{n\to\infty}\inf\|x_{ki} - y_{ki}\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sup\delta(A_n,B_n)$$

定理 1.5.17 设$\{A_n\}\subset \mathbf{P}_{fc}(X)$具有局部弱紧控制，则

$$\lim_{n\to\infty}\sup d(x,A_n) \geqslant d(x,w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n), x\in X.$$

证明 不妨假设$\lim\limits_{n\to\infty}\inf d(x,A_n) < \infty$，则依定理1.5.12可以证$w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$非空. 任给数列$\{d(x,A_n),n\geqslant 1\}$的收敛子列$\{d(x,A_{nk}),k\geqslant 1\}$，取$x_k\in A_{nk}$，使得

$$\|x - x_k\| < d(x,A_{nk}) + \frac{1}{k}(k\geqslant 1)$$

则$\sup\limits_{k\geqslant 1}\|x_k\| = a < \infty$，从而$\{x_k,k\geqslant 1\}\subset R\cap \bar{S}(0,a)$（其中$R\in \mathbf{P}_{fwkc}(X)$，使得$A_n\in R, n\geqslant 1$）. 因此，必然存在$\{x_{ki},i\geqslant 1\}\subset\{x_k,k\geqslant 1\}$，使得

$$(w)x_{ki} \to x_0 \in w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n(i\to\infty)$$

依范数的弱下半连续性即有

$$\lim_{k\to\infty} d(x, x_{k_i}) \geqslant \lim_{i\to\infty}\inf \| x - x_{ki} \| \geqslant \| x - x_0 \|$$

$$\geqslant d(x, w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n)$$

由子列$\{d(x, A_{nk}); k \geqslant 1\}$的任意性可证结论成立.

定理 1.5.18 设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$,则

(1) $w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n = \bigcup_{p\geqslant 1}(w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup(A_n \cap \bar{S}(0, p)))$

(2) 若进一步$\{A_n\}$具有局部弱紧控制,则

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n = \bigcup_{p\geqslant 1}\bigcap_{n\geqslant m} \mathrm{cl}_w(A_n \cap \bar{S}(0, p)))$$

其中cl_w表示弱拓扑意义下的闭包.

证明 (1) 显然右边包含于左边. 任给$x \in w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n$,存在$x_k \in A_{nk}(k \geqslant 1)$,使$(w)x_k \to x$,因此依弱拓扑的性质可以证明知$\sup_{k\geqslant 1}\| x_k \| = \alpha < \infty$. 设$P_0$为大于$\alpha$的正整数,则任给$k \geqslant 1, x_k \in A_{nk} \cap \bar{S}(0, r_0)$. 从而

$$x \in w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup(A_n \cap \bar{S}(0, r_0))$$

所以左边包含于右边.

(2) 根据(1),仅需证明对于任意$P \geqslant 1$.

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup(A_n \cap \bar{S}(0, p)) = \bigcap_{m\geqslant m}(\bigcup_{n\geqslant m}(A_n \cap \bar{S}(0, p)))$$

但依假设知存在$R \in \mathbf{P}_{lwkc}(X)$,使得$A_n \in R(n \geqslant 1)$,因此$A_n \cap \bar{S}(0, p) \subset R \cap \bar{S}(0, p) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)(n \geqslant 1)$. 由于弱拓扑限制在弱紧集$R \cap \bar{S}(0, p)$上是可度量化的,故类似于定理1.5.11可证.

推论 1.5.2 设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$,$X^*$是可分的,则

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n = \bigcup_{p\geqslant 1}\bigcap_{m\geqslant 1}\mathrm{cl}_w(\bigcup_{n\geqslant m}(A_n \cap \bar{S}(0, p)))$$

证明 如果 X^* 是可分的，由 Banach 空间的知识知弱拓扑限制在 $\bar{S}(0,p)(p \geqslant 1)$ 上是可度量化的，故类似于定理 1.5.18(2) 可证.

[注] 定理 1.5.18 的证明中主要用到了弱收敛序列必强有界这一结论以及集列弱上极限的表达式. 因此，对于集列的弱下极限，集列的强上、下极限，相应的结果同样成立.

下面，我们讨论集列的 Kuratowski 型收敛与其它意义收敛之间的关系.

定理 1.5.19 设 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_f(X)$，$(\delta)A_n \to A$，则 $(K)A_n \to A$. 若进一步 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，则 $(K.M)A_n \to A$.

证明 设 $x \in A$，则任给 $n \geqslant 1$，存在 $x_n \in A_n$，使得

$$\| x - x_n \| \leqslant d(x, A_n) + \frac{1}{n}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(A_n, A) = 0$，依定理 1.5.2 知 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0$，从而 $(s)x_n \to x$，所以 $x \in s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$，即知

$$A \subset s\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n \tag{1.5.1}$$

若 $x \in s\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$，则存在 $\{x_{n_i}\}$，$x_{n_i} \in A_{n_i}$，使得 $(s)x_{n_i} \to x$. 因为 $(\delta)A_n \to A$，所以任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$，使得 $n \geqslant N$ 时恒有 $A_n \subset A + \varepsilon$，故 $x \in A + \varepsilon(\varepsilon > 0)$，依 ε 的任意性知 $x \in A$，从而有

$$s\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A \tag{1.5.2}$$

若进一步 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，则依定理 1.2.8，$A \in \mathbf{P}_{fc}(X)$. 根据弱拓扑的性质，$\{A_n\}$，$A$ 均为弱闭集，但由于

$$\varepsilon + A = \{x \in X, d(x,A) \leqslant \varepsilon\} \in \mathbf{P}_{fc}(X)$$

从而也是弱闭集.同样可证若 $x \in w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$，则 $x \in A$，即

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n \subset A \tag{1.5.3}$$

结合(1.5.1)、(1.5.2)、(1.5.3) 及定理 1.5.9 即证定理成立.

[注] 事实上定理1.5.19中的条件"$(\delta)A_n \to A$"可进一步放宽为"$(r)A_n \to A$"，用完全类似的方法可证结论依然成立.

定理 1.5.20 设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_f(X)$，$A \in \mathbf{P}_f(X)$，若(wijs)$A_n \to A$，则$(K)A_n \to A$.

证明 任给 $x \in A$，由于 $d(x,A) = 0$，故由(wijs)$A_n \to A$，知

$$\lim_{n\to\infty} d(x,A_n) = d(x,A) = 0$$

对于任意的 $n \geqslant 1$，取 $x_n \in A_n$，使得

$$\| x - x_n \| \leqslant d(x,A_n) + \frac{1}{n}$$

则有$(s)x_n \to x$，从而 $x \in s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n$. 因此，

$$A \subset s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf A_n$$

任给 $x \in s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$，依定义存在 $x_k \in A_{nk}(k \geqslant 1)$，使得$(s)x_k \to x(k \to \infty)$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sup d(x,A_{nk}) = 0$$

则有

$$d(x,A) = \lim_{n\to\infty} d(x,A_n) = \lim_{n\to\infty} d(x,A_{nk}) = 0$$

即知 $x \in A$. 因此，$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n \subset A$. 定理得证.

定理 1.5.21 设 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，具有局部弱紧控制，$A \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，若 $(K.M)A_n \to A$，则 $(\mathrm{wijs})A_n \to A$.

证明 任给 $x \in X$，依定理 1.5.17 知

$$\lim_{n\to\infty}\inf d(x,A_n) \geqslant d(x, w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n)$$

另一方面，任给 $y \in s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n$，存在 $y_n \in A_n (n \geqslant 1)$，使得 $(s)y_n \to y$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sup d(x,A_n) \leqslant \lim_{n\to\infty}\|x - y_n\| = \|x - y\|$$

依 $y \in s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n$ 的任意性可得

$$\lim_{n\to\infty}\sup d(x,A_n) \leqslant d(x, s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf A_n$$

但由于 $(K.M)A_n \to A$，即 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n = A$ 因此

$$\lim_{n\to\infty}\inf d(x,A_n) \geqslant \lim_{n\to\infty}\sup d(x,A_n).$$

从而知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(x,A_n) &= d(x,A_n) \\
&= d(x, w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n) \\
&= d(x, s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf A_n) \\
&= d(x,A)
\end{aligned}$$

于是 $(\mathrm{wijs})A_n \to A$.

[注 1] 定理 1.5.21 中“具有局部弱紧控制”这一条件一般不能去掉，请参阅定理 1.5.24.

[注 2]　由定理 1.5.21 的证明可以看出，任给$\{A_n\}\subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，必有$\limsup_{n\to\infty} d(x,A_n)\leqslant d(x,s\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n)(x\in X)$.

定理 1.5.22　设$\{A_n,A\}\subset \mathbf{P}_{fc}(X)$. 具有弱紧控制，若$(M)A_n\to A$，则$(w)A_n\to A$

证明　由定理 1.5.14 易证.

例 1.5.1　(1) 考虑R^2上的闭凸集列

$$A_n=\{(x,y),y\geqslant nx+n,x\leqslant 0\}$$

则有$(K)A_n\to\{(x,y),x\leqslant -1,y\in R\}$，但是

$$(w)A_n\to\{(x,y),x\geqslant 0\}.$$

(2)　考虑l^2中的单点集列$A_n=\{e_n\},A=\{0\}$，其中$\{e_n,n\geqslant 1\}$为l^2的标准基，0 为l^2中零向量. 由于l^2是自反的 Banach 空间，而$\|A_n\|=1(n\geqslant 1)$，故$\{A_n,A\}$具有弱紧控制，显然有$(w)A_n\to A$. 但由于$\inf_{m\neq n}\|e_m-e_n\|=\sqrt[2]{2}>0$，从而$s\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n$不存在，于是不可能有$(K.M)A_n\to A$.

例 1.5.1 的两个例子，表明在一般的情形下集列的弱收敛推不出集列的 Kuratowski 型收敛，为了得到肯定性的结论，必须对集列的支撑函数族加一定条件，这一内容将放在本节最后讨论.

定理 1.5.23　设$\{A_n,A\}\subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，考虑下列三个命题：

(1)　$(\mathbf{J}_L)A_n\to A$；

(2)　$(w)A_n\to A$，且$(K)A_n\to A$；

(3)　$(K.M)A_n\to A$.

则(1)⇒(2)⇒(3). 若进一步$\{A_n,A\}$具有弱紧控制，则三个命

题等价.

证明 "(1)⇒(2)"根据J_l-收敛的定义及定理1.5.20易证.

"(2)⇒(3)"若$(w)A_n \to A$,且$(K)A_n \to A$,依定理1.5.13知

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$$

而由Kuratowski收敛的定义,有

$$A = s\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n = s\text{-}\limsup_{n\to\infty} \subset w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n$$

因此,$(K.M)A_n \to A$.

若$\{A_n, A\}$具有弱紧控制,我们仅需证明

"(3)⇒(1)" 若$(K.M)A_n \to A$,则由定理1.5.21知$(\text{wijs})A_n \to A$,由定理1.5.10,定理1.5.22可知$(w)A_n \to A$,所以$(J_l)A_n \to A$.

从以上的讨论可以看出,集列的Hausdorff收敛蕴涵着其它各种收敛;Kuratowski-Mosco收敛蕴涵着Kuratowski收敛及Mosco收敛,并且在一定条件下它还蕴涵着Kuratowski收敛等等. 为了得到各种收敛间更为细致的蕴涵关系(或相反的蕴涵关系),必须要求Banach空间本身有更好的性质,而这样做的同时,也就用集列收敛的关系给出了Banach空间特征的刻划. 下面我们讨论这一问题.

定理1.5.24 设X为Banach空间,则下列命题等价

(1) X是自反的;

(2) 任给$\{A_n, A\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$,若$(K.M)A_n \to A$,则

(wijs)$A_n \to A$.

证明 “(1)⇒(2)” 由于自反Banach空间中任意闭凸集列均有局部弱紧控制，依定理1.5.21知(2)成立.

“(2)⇒(1)” 用反证法，假设X不是自反的，取$x \in X$，$\|x\| = 1$. 令$K = \overline{S}(0,1) \cap S(x, \frac{1}{2})$，由于$\overline{S}(\frac{3}{4}x, \frac{1}{4}) \subset K$，故$K$不是弱紧的(由$X$的非自反性)，因此存在点列$\{x_n\} \subset K$，使得$\{x_n\}$没有弱聚点. 令$A = \{0\}$.

$$A_n = \{x \in X, x = ax_n, 0 \leqslant a \leqslant 1\} = \overline{\mathrm{co}}\{0, x_n\}$$

则$\{A_n, A\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$. 任给$y \in w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$，存在$a_k = a$(否则取其子列). 若$a = 0$，则$y = 0 \in A$，若$a \neq 0$，必然有$(w)x_k \to \frac{1}{ay}$，而这是不可能的(因为$\{x_n\}$无弱聚点).

因此

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A, (K\cdot M)A_n \to A$$

但是，由于任给$n \geqslant 1$，$d(x, A_n) \leqslant \|x - x_n\| \leqslant \frac{1}{2}$，而$d(x, A) = \|x\| = 1$，因此不可能有(wijs)$A_n \to A$，与(2)所给条件矛盾，则假设不成立，故$X$是自反的Banach空间.

定理1.5.25 设$\{A_n, A\} \subset \mathbf{P}_{kc}(X)$，则下列命题等价

(1) $\dim X < \infty$;

(2) $(\delta)A_n \to A$当且仅当$(K.M)A_n \to A$.

证明 “(1)⇒(2)” 首先当X是有限维时，强、弱拓扑等价，从而$w\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = s\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$，于是依定义易知

$$(K.M)A_n \to A \text{ 当且仅当}(K)A_n \to A$$

若$(\delta)A_n \to A$，依定理1.5.19$(K.M)A_n \to A$.

若$(K.M)A_n \to A$，则$(K)A_n \to A$，下面我们将进一步证明$(\delta)A_n \to A$. 由于A是紧的，所以存在A的有限子集$\{x_1,\cdots,x_m\}$及$\varepsilon > 0$，使得$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} S(x_i,\varepsilon)$. 因为

$$s\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A \subset s\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n$$

而$x_i \in A$，故存在$\{x_i^{(n)}\}$，$x_i^{(n)} \in A_n$，使$(S)x_i^{(n)} \to x_i$，即存在$N_i \geqslant 1$，使得$n \geqslant N_i$时，$\| x_i - x_i^{(n)} \| \leqslant \varepsilon$，从而$x_i \in A_n + \varepsilon (n \geqslant N_i)$. 取$N = \max\{N_i, 1 \leqslant i \leqslant m\}$，则当$n \geqslant N$时，

$$\{x_1,\cdots,x_m\} \subset A_n + \varepsilon$$

于是

$$\begin{aligned} A &\subset \bigcup_{i=1}^{m} S(x_i,\varepsilon) \\ &= \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + S(0,\varepsilon)) \subset A_n + \varepsilon + \varepsilon \\ &= A_n + 2\varepsilon \end{aligned} \qquad (1.5.4)$$

另一方面对于任给$\varepsilon > 0$，可以证明存在n_0，及$r > 0$，使$n \geqslant n_0$时$A \subset \overline{S}(0,r)$，$A_n \subset \overline{S}(0,r)$. 假设存在子列$\{A_{n_i}, i \geqslant 1\}$，使得

$$A_{n_i} \backslash (\varepsilon + A) \neq \varnothing (i \geqslant 1)$$

取$x_{n_i} \in A_{n_i} \backslash (\varepsilon + A)$，由于$\{x_{n_i}, i \geqslant 1\} \subset \overline{S}(0,r)$，而$\overline{S}(0,r)$，为紧集，故存在子列，不妨仍记为$\{x_{n_i}, i \geqslant 1\}$，使$(s)x_{n_i} \to x$，因而$x \in \overline{\lim} A_n = A$. 但由于$\{x_{n_i}, i \geqslant 1\}$的取法$d(x,A) =$

$\lim_i d(x_{n_i}, A) \geq \varepsilon$, $x \notin \operatorname{int}(\varepsilon + A)$，从而产生矛盾．这就是说任给 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 \geq 0$，使 $n \geq n_0$ 时，

$$A_n \subset A + \varepsilon \tag{1.5.5}$$

由(1.5.4)、(1.5.5) 知$(\delta) A_n \to A$.

"(2)⇒(1)"　用反证法，假设 $\dim X = \infty$，以下分两种情形讨论．

(i)　若 $l^1 = \{(a_1, a_2, \cdots), \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty\}$ 不与 X 的任何子空间同构，则依 Rosenthal 定理，X 中任意有界序列均有一弱 Cauchy 序列．

设$\{x_n\}$为 X 中有界序列，$\|x_n\| \leq 1 (n \geq 1)$ 且没有强收敛子列，此时不妨假定 $\|x_m - x_n\| > \varepsilon_0 (m \neq n)$. 依Rosenthal 定理，$\{x_n\}$ 有弱Cauchy 子列$\{x_{n_k}\}$. 令 $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k+1}} (k \geq 1)$，则易知$\{y_n\}$ 弱收敛到 0，且 $\|y_n\| > \varepsilon_0 (n \geq 1)$. 记

$$K_n = \{\alpha y_n, \alpha \in [0,1]\} = [0,1] y_n \qquad (n \geq 1)$$

$\{K_n\} \subset \mathbf{P}_{kc}(X)$，下面证明$(K.M) K_n \to \{0\}$，但不可能有

$$(\delta) K_n \to \{0\}$$

设 $x \in w\text{-}\limsup_{n\to\infty} K_n$，则必然存在$\alpha_k y_{n_k} \in K_{n_k}$, $\alpha_k \in [0,1]$，使得$(w) \alpha_k y_{n_k} \to x$，即 $x^* \in X^*$，时有

$$\lim_{n\to\infty} \langle x^*, x - \alpha_k y_{n_k} \rangle = 0$$

但由于 $\alpha_k \in [0,1] (k \geq 1)$，$(w) y_{n_k} \to 0$，故 $\langle x^*, x \rangle = 0 (x^* \in X^*)$，从而 $x = 0$，于是有

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} K_n \subset \{0\} \tag{1.5.6}$$

另一方面，取 $x_n = \frac{1}{n} y_n$，由于 $(w) y_n \to 0$，从而 $\sup_{n\geq 1} \| y_n \| < \infty$，所以 $(s) x_n \to 0$，于是

$$\{0\} \subset s\text{-}\liminf_{n\to\infty} K_n \tag{1.5.7}$$

所以 $(K.M) K_n \to \{0\}$. 但是，因 $\delta(K_n, \{0\}) = \sup\{\|x\|, x \in K_n\} = \|y_n\| > \epsilon_0$，故不可能有 $(\delta) K_n \to \{0\}$. 这样，就得 $\mathbf{P}_{kc}(X)$ 上的集列 $\{K_n\}$，使得 $(K.M) K_n \to \{0\}$，但 $(\delta) K_n \to \{0\}$ 不成立，这与(2) 矛盾，从而假设不成立.

(ii)　若 l^1 与 X 的某一子空间同构，取

$$K_n = \{\alpha e_n, \alpha \in [0,1]\} \qquad (n \geq 1)$$

其中 e_n 表示第 n 个标准基，则

$$\delta(K_n, \{0\}) = 1 \qquad (n \geq 1)$$

即不可能有 $(\delta) K_n \to \{0\}$. 下证 $(K.M) K_n \to \{0\}$.

设 $x \in w\text{-}\limsup_{n\to\infty} K_n$，则存在 $x_{n_k} \in K_{n_k}$ 使 $(w) x_{n_k} \to x$. 如果记 $x_{n_k} \in l^1$ 的第 i 个分量为 $\xi_{n_k}^{(i)}$，则 $\xi_{n_k}^{(i)} \to \xi^{(i)} (k \to \infty)$. 但由于 $\xi_{n_k}^{(i)} = \alpha_k \delta_{n_k}^{i}$，其中 $\alpha_k \in [0,1]$，而

$$\delta_{n_k} = \begin{cases} 0 & i \neq n_k \\ 1 & i = n_k \end{cases}$$

故 $\xi^{(i)} = 0 \quad (i \geq 1)$，即 $x = (\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(i)}, \cdots) = 0$. 于是

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} K_n \subset \{0\}$$

由于 $(s) \frac{1}{n} e_n \to 0$，所以

$$\{0\} \subset s\text{-}\liminf_{n\to\infty} K_n$$

从而 $(K.M) K_n \to K = \{0\}$.

由上所述，若 l^1 与 X 某一子空间同构，则也可找到一个紧凸集列使得它 Kuratouski-Mosco 收敛，但不 Hausdorff 收敛，这与(2) 矛盾，从而也导致假设不成立.

综合(i)、(ii) 知若(2) 成立，则 X 不可能是无穷维的，即 $\dim X < \infty$.

定义 1.5.5 Banach 空间 X 称作 Schur 空间，如果 X 中序列的弱收敛与范数收敛(强收敛) 等价.

定理 1.5.26 设 X 为 Banach 空间，则下列命题等价

(1) X 为 Schur 空间；

(2) X 中每一弱收敛序列都有强收敛子列；

(3) 对于 $\mathbf{P}_{kc}(X)$ 中任一集列 $\{A_n\}$，有

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset s\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n;$$

(4) 对于 $\mathbf{P}_{kc}(X)$ 中任意 Kuratowski 收敛集列 $\{A_n\}$，有

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset s\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n;$$

(5) 对于 $\mathbf{P}_{kc}(X)$ 中任意集列 $\{A_n\}$，若 $(K)A_n \to A$，则 $(K.M)A_n \to A$.

证明 "(1)⇒(2)"、"(3)⇒(4)" 及"(4) 与(5) 等价" 是显然的.

"(2)⇒(1)" 假设存在序列 $\{x_n\} \subset X$，$\{x_n\}$ 弱收敛，但不强收敛，则存在 $\epsilon_0 > 0$ 及子列 $\{x_{nk}\}$，使得任给 $k, k' \geqslant 1, k \neq k'$，有

$$\| x_{nk} - x_{nk'} \| > \epsilon_0$$

$\{x_{nk}\}$ 显然没有强收敛子列，但却弱收敛，这与(2) 矛盾. 因而

假设不成立，即 X 为 Schur 空间．

"(2)⇒(3)"　设 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_k(X)$，$x \in w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n$，则存在 $\{x_{nk}\} \subset X$，使得 $x_{nk} \in A_{nk}(k \geqslant 1)$ 且 $(w)x_{nk} \to x$，依据(2)，$\{x_{nk}\}$ 存在强收敛子列（不妨仍记作 $\{x_{nk}\}$）使得 $(s)x_{nk} \to x$，所以 $x \in s\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n$，从而(3) 得证．

"(4)⇒(2)"　假设(2) 不成立，即存在 $\{x_n\} \subset X$，使得 $(w)x_n \to x$，但 $\{x_n\}$ 没有强收敛子列．取 $z \in X\backslash\{x\}$，记

$$K_n = \mathrm{co}\{z, x_n, n \geqslant 1\}$$

下面我们证明 $(K)K_n \to (z)$.

显然 $\{z\} \subset s\text{-}\limsup_{n\to\infty} K_n$. 假设 $y \in s\text{-}\limsup_{n\to\infty} K_n$，则必然存在 $\{y_{nk}\}$ 使得 $y_{nk} \in K_{nk}$ 且 $(s)y_{nk} \to y$. 依 K_n 的构造可知任给 $k \geqslant 1$，存在 $\lambda_k \in [0,1]$，使得 $y_{nk} = \lambda_k z + (1-\lambda_k)x_{nk}$. 现在我们设 $\{\lambda_{ki}\}$ 为 $\{\lambda_k\}$ 的一个收敛子列，$\lim_{n\to\infty} \lambda_{ki} = \lambda$. 如果 $\lambda \neq 1$，则

$$x_{nk} = \frac{1}{1-\lambda_k}(s)(y_{nk} - \lambda_k z) \to \frac{1}{1-\lambda}(y - \lambda z) \in X$$

这与 $\{x_n\}$ 无强收敛子列的假设矛盾，故 $\lambda = 1$，故 $y = \lim_{k\to\infty} y_{nk} = z$，所以 $s\text{-}\lim\sup_{n\to\infty} K_n \subset \{z\}$. 于是 $(K)K_n \to \{z\}$. 由命题(4) 成立可知

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup K_n \subset s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup K_n = \{z\}$$

但 $x_n \in K_n(n \geqslant 1)$ 且 $(w)x_n \to x$，故

$$x \in w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup K_n$$

所以 $x = z$，这与 $z \in X\backslash\{x\}$ 矛盾，从而假设不成立，即(2) 成立．

推论 1.5.3 若 X 为自反的 Banach 空间，则下列陈述等价

(1) $\dim X < \infty$；

(2) 对于 $\mathbf{P}_{kc}(X)$ 中任意集列 $\{A_n\}$，若 $(K)A_n \to A$，则 $(K.M)A_n \to A$.

证明 由于自反的 Schur 空间是有限维的，故证明是显然的.

定理 1.5.27 设 c 为 $\mathbf{P}_k(X)$ 上的某种意义下的收敛，且满足

(1) $(c)\{x_n\} \to \{x\}$ 当且仅当 $(s)x_n \to x$，$x_n \in X$，$n \geqslant 1$；

(2) 任给 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_k(X)$，若 $(c)A_n \to A$，则

$$A \in \mathbf{P}_k(X),\ \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \in \mathbf{P}_k(X);$$

(3) 任给 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_k(X)$，若 $(\delta)A_n \to A$，则 $(c)A_n \to A$；若 $(c)A_n \to A$；则 $(K)A_n \to A$.

那么对于 $\mathbf{P}_k(X)$ 中任意集列 $\{A_n\}$，$(c)A_n \to A$ 当且仅当 $(\delta)A_n \to A$.

证明 用反证法. 假设存在集列 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_k(X)$，使得 $(c)A_n \to A$，但 $(\delta)A_n \to A$ 不成立，则只可能出现下列两种情形：

(a) 存在 $\varepsilon_1 > 0$ 及 $\{A_n\}$ 的子列 $\{A_{nk}\}$ 使得 $k \geqslant 1$ 不可能有

$$A_{nk} \subset A + \varepsilon_1$$

或者

(b) 存在 $\varepsilon_2 > 0$ 及 $\{A_n\}$ 的子列 $\{A_{ni}\}$ 使得 $i \geqslant 1$ 不可能有

$$A \subset A_{ni} + \varepsilon_2$$

因为 $A \in \mathbf{P}_k(X)$，故存在 A 中的有限个点 $\{x_1, \cdots, x_N\}$，使得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} S(x_i, \frac{\varepsilon_2}{2})$$

但依假设 $(K)A_n \to A$，即 $A \subset s\text{-}\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$，故任给 $x_i \in A$，必存在 $\{x_i^{(n)}\}$，$x_i^{(n)} \in A_n$，使得 $(s)x_i^{(n)} \to x_i$，所以存在正整数 $n(\varepsilon_2)$，使得 $n \geqslant n(\varepsilon_2)$ 时，有

$$d(x_i, A_n) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2} \qquad (i \leqslant N)$$

于是可知 $S(x_i, \frac{\varepsilon_2}{2}) \subset A_n + \varepsilon_2 (i \leqslant N)$，即 $A \subset A_n + \varepsilon_2$. 所以情形(b) 不可能出现.

假设情形(a) 成立，则存在 $\{x_k\}$，使得 $k \geqslant 1, x_k \in A_{nk}$，但 $x_k \notin A + \varepsilon_1$. 不妨设 $(s)x_k \to x$，由于 $\{x_k\} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n}$. 由于 $x_k \notin A + \varepsilon_1 (k \geqslant 1)$，故 $x \notin A + \varepsilon_1$，从而更有 $x \notin A$，但这与假设 $(K)A_n \to A$ 矛盾，所以假设不成立，从而定理得证.

定理 1.5.28 设 $\{A_n\} \subset \mathbf{P}_k(X)$，则下列陈述等价

(1) $(\delta)A_n \to A$;

(2) $(K)A_n \to A$，且 $A \in \mathbf{P}_k(X)$，$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n} \in \mathbf{P}_k(X)$.

证明 "(1)⇒(2)" 因为 $(\delta)A_n \to A$，故依定理 1.2.10 知 $A \in \mathbf{P}_k(X)$，依定理 1.5.19 知 $(K)A_n \to A$. 依 Hausdorff 收

敛的定义，任给 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \geqslant 1$，使 $n \geqslant 1$ 时，

$$A_n \subset A + \varepsilon$$

依 A 的紧性可以证明 $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n}$ 是完全有界的，从而是紧的．

"(2)⇒(1)"　在定理 1.5.27 中取收敛意义 c 为 Kurotowski 收敛，由于(2) 成立，可以验证此处的 Kurotowski 收敛满足定理 1.5.27 的三个条件，故$(\delta)A_n \to A$.

在本节的最后，我们给出有限维空间中闭集列收敛更细致的结果．以下恒设 X 为有限维Banach空间．由于有限维空间中强收敛与弱收敛等价，因此在后面叙述中我们略去定义 1.5.3 中极限号前的 $s(w)$:

定理 1.5.29　设$\{A_n\} \subset \mathbf{P}_f(X)$. 则下列命题等价

(1)　$(K)A_n \to \varnothing$，即$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \varnothing$；

(2)　任给 $K \in \mathbf{P}_k(X)$，存在 $N \geqslant 1$，使得

$$A_n \cap \overline{S}(x,\varepsilon) = \varnothing (n \geqslant N);$$

(3)　任给 $x \in X, \varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$，使得

$$A_n \cap \mathring{S}(x,\varepsilon) = \varnothing (n \geqslant N).$$

证明　"(1)⇒(2)"　用反证法．假设存在 $K \in \mathbf{P}_k(X)$ 以及子序列$\{A_{nk}, k \geqslant 1\} \subset \{A_n, n \geqslant 1\}$ 使得 $A_n \cap K \neq \varnothing (k \geqslant 1)$，取 $x_k \in A_{nk}$，则$\{x_{nk}, k \geqslant 1\} \subset K$，从而存在收敛的子列(不妨仍旧记作$\{x_k, k \geqslant 1\}$)，使 $x_k \to x$，则 $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 这与 $(K)A_n \to \varnothing$ 矛盾，故(2) 成立．

"(2)⇒(1)"　由于 X 是有限维的，故任给 $x \in X, \varepsilon > 0$，$\overline{S}(x,\varepsilon)$ 是紧的，所以(3) 成立．

"(3)⇒(1)" 由于$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$，故仅需证明

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \varnothing$$

用反证法，假设$\limsup_{n\to\infty} A_n \neq \varnothing$，取$x_k \in A_{n_k}, x_k \to x$，则当$k$充分大时恒有$x_k \in A_{n_k} \cap \bar{S}(x,1) \neq \varnothing$，这与(3)所给条件矛盾，即(1)成立.

定理 1.5.30 设$\{A_n, A\} \subset \mathbf{P}_f(X)$. 则下列命题等价

(1) 任给开集$G \subset X$，若$A \cap G \neq \varnothing$，则存在$N \geqslant 1$，使得$n \geqslant N$时，$A_n \cap G \neq \varnothing$；

(2) 任给$x \in X, \varepsilon > 0$，若$A \cap S(x,\varepsilon) \neq \varnothing$，则存在$N \geqslant 1$，使得$n \geqslant N$时，$A_n \cap S(x,\varepsilon) \neq \varnothing$；

(3) 任给$x \in X, \limsup_{n\to\infty} d(x,A_n) \leqslant d(x,A)$；

(4) 任给$\varepsilon > 0, (K)A \backslash (\varepsilon + A_n) \to \varnothing$；

(5) 任给$x \in X, \varepsilon, r > 0$，存在$N \geqslant 1$，使得$n \geqslant N$时，

$$A \cap \bar{S}(x,r) \subset \varepsilon + A_n;$$

(6) 任给$x \in X, A \subset \bigcup_{p \geqslant 1} (\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap \bar{S}(x,p)))$；

(7) $A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$.

证明 "(7)⇒(5)" 由定理 1.5.18 及其注即得.

"(6)⇒(5)" 固定$x \in X, r > 0$，由于X有限维，故$\bar{S}(x,r)$是紧的，从而$A \cap \bar{S}(x,r)$也是紧的，因此对于任给$\varepsilon > 0$，存在有限个$\{y_1, \cdots, y_m\} \subset A \cap \bar{S}(x,r)$，使得$A \cap \bar{S}(x,r)$，$\subset \bigcup_{i=1}^{m} \bar{S}(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$. 但依(6)的条件及定理 1.5.18 及其注

$$A \subset \bigcup_{p \geqslant 1} (\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap \bar{S}(x,p))) = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

则任给 $1 \leqslant i \leqslant m$，存在 $N_i \geqslant 1$，使得

$$d(y_i, A_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} (n \geqslant N_i)$$

即 $\overline{S}(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset A_n$，取 $N = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} N_i$，则当 $n \geqslant N$ 时，必有

$$A \cap \overline{S}(x, r) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{S}(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \varepsilon + A_n$$

"(5)⇒(4)"　对集列 $\{A \backslash (\varepsilon + A_n)\}$ 应用定理 1.5.29 即得.

"(4)⇒(3)"　若(3)不成立，则存在 $x \in X, \varepsilon > 0$，及 $\{n_k, k \geqslant 1\}$ 使得 $d(x, A_{n_k}) > d(x, A) + \varepsilon (k \geqslant 1)$，也就是说 $d(x, \varepsilon + A_{n_k}) > d(x, A)$. 任取 $y \in A$，使得 $d(x, y) = d(x, A)$，则 $y \in A \backslash (\varepsilon + A_{n_k})$，从而有

$$y \in \limsup_{n \to \infty} (A \backslash (\varepsilon + A_n)) \neq \varnothing$$

与(4)假设矛盾，即(3)成立.

"(3)⇒(2)"　若 $\limsup\limits_{n \to \infty} d(x, A_n) \leqslant d(x, A)$，则对于任意 $\varepsilon > d(x, A)$ 时，必存在 $N \geqslant 1$，使得 $d(x, A_n) < \varepsilon (n \geqslant N)$，对于任意 $x \in X, \varepsilon > 0$，若 $A \cap S(X, \varepsilon) \neq \varnothing$，则 $d(x, A) < \varepsilon$，从而存在 $N \geqslant 1$，使得 $n \geqslant N$ 时，$d(x, A_n) < \varepsilon$，亦即 $A_n \cap S(x, \varepsilon) \neq \varnothing$.

"(2)⇒(7)"　由于 X 是有限维的，则任意开集均可表示为开球的可数并，即(1)成立.

"(1)⇒(7)"　任给 $x \in A, \varepsilon > 0, A \cap S(x, \varepsilon) \neq \varnothing$. 假设 $x \notin \liminf\limits_{n \to \infty} A_n$. 则必存在 $\{n_k, k \geqslant 1\}$，使得 $d(x, A_{n_k}) > \varepsilon (k \geqslant$

1)，从而 $A_n \cap S(x,\varepsilon) = \varnothing$. 与(1) 矛盾，故

$$A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

定理 1.5.31 设 $\{A_n, A\} \subset \mathbf{P}_f(X)$，则下列命题等价

(1) 任给紧集 $K \subset X$，若 $A \cap K = \varnothing$，则存在 $N \geqslant 1$，使得 $n \geqslant N$ 时，$A_n \cap K = \varnothing$；

(2) 任给 $x \in X, \varepsilon > 0$，若 $A \cap \bar{S}(x,\varepsilon) = \varnothing$，则存在 $N \geqslant 1$，使得 $n \geqslant N$ 时，$A_n \cap K = \varnothing$；

(3) 任给 $x \in X, d(x,A) \leqslant \liminf_{n\to\infty} d(x,A_n)$；

(4) 任给 $x \in 0, (K)A_n \backslash (\varepsilon + A) \to \varnothing$；

(5) 任给 $x \in X$，$\bigcup_{p\geqslant 1} (\limsup_{n\to\infty} (A_n \cap \bar{S}(x,p))) \subset A$；

(6) $\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$.

证明 "(7)⇒(1)" 用反证法．假设存在紧集 $K \subset X$ 以及子序列 $\{A_{nk}, k \geqslant 1\}$，使得 $A \cap K = \varnothing$，而 $A_{nk} \neq \varnothing (k \geqslant 1)$，取 $x_{nk} \in A_{nk} \cap K$ 则 $\{x_k, k \geqslant 1\} \subset K$，因而存在收敛的子列，即可以证得 $(\limsup_{n\to\infty} A_n) \cap K \neq \varnothing$，从而依(7) 有 $A \cap K \neq \varnothing$，矛盾．

"(1)⇒(2)" 由于 X 是有限维的，任意闭球是紧的，故(2) 成立．

"(2)⇒(3)" 任取 $x \in X$，由于 $d(x,A) > \varepsilon$ 当且仅当 $A \cap \bar{S}(x,\varepsilon) = \varnothing$，因此由(2) 对于任给 $x \in X$，由于 $d(x,A) > \varepsilon a$，则必存在 $N \geqslant 1$，使得 $n \geqslant N$ 时，$A_n \cap \bar{S}(x,a) = \varnothing$，即 $d(x,A_n) > a$，依实数列下极限的性质知(3) 成立．

"(3)⇒(4)" 假设 $\limsup_{n\to\infty} (A_n \backslash (\varepsilon + A)) \neq \varnothing$，取 $x_k \in$

$A_{nk}\backslash(\varepsilon-A)$，使$(s)x_k\to x\in\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n\backslash(\varepsilon+A_n))$．一方面，任给$k\geqslant 1$．

$$\varepsilon<d(x_k,A)\leqslant d(x,A)+\|x-x_k\|$$

从而$d(x,A)\geqslant\varepsilon$；另一方面，任给$k\geqslant 1$，有

$$d(x,A_{nk})\leqslant\liminf_{n\to\infty}d(xA_n)\leqslant 0$$

矛盾．

"(4)⇒(5)"　对集列$\{A_n\backslash(\varepsilon+A)\}$应用定理1.5.29即得．

"(5)⇒(6)"　固定$x\in X$，对于任给$\varepsilon>0,p\geqslant 1$，依(5)存在$N\geqslant 1$，使得$n\geqslant N$时，$A_n\cap\overline{S}(x,p)\subset\varepsilon+A$，从而知$\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n\cap\dot{S}(x,p))\subset\varepsilon+A$，由$\varepsilon>0$的任意性及强上极限的闭性知(6)成立．

"(6)⇒(7)"　由定理1.5.18及其注易得．

定理 1.5.32　设$\{A_n,A\}\subset\mathbf{P}_f(X)$，则下列命题等价

(1)　$\{A_n\}$在闭收敛拓扑$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$意义下收敛到$A$；

(2)　$(K)A_n\to A$；

(3)　任给$x\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}d(x,A_n)=d(x,A)$；

(4)　任给$\varepsilon>0$，$(K)(A\backslash(\varepsilon+A_n))\cup(A_n\backslash(\varepsilon+A))\to\varnothing$；

(5)　任给$x\in X$，$A=\bigcup\limits_{p\geqslant 1}(\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n\cap S(x,p)))$

$$=\bigcup_{p\geqslant 1}(\liminf_{n\to\infty}(A_n\cap\overline{S}(x,p)))；$$

(6)　$(r)A_n\to A$.

证明　综合定理1.5.30、定理1.5.31即得．

定理 1.5.33 设$\{A_n, A\} \subset \mathbf{P}_{kc}(X)$，则下列命题等价

(1) $(\delta)A_n \to A$；

(2) $(r)A_n \to A$；

(3) $(\text{wijs})A_n \to A$；

(4) $(K)A_n \to A$；

(5) $(K.M)A_n \to A$；

(6) $(M)A_n \to A$；

(7) $(W)A_n \to A$.

证明 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) 对任意 Banach 空间都成立（见本节前面部分），由于 X 是有限维的，故依定理 1.5.25 知 (4)⇒(1)，故前四个命题相互等价．由于有限维 Banach 空间必是 Schur 空间，依定理 1.5.26 知(4)、(5)、(6) 等价，仅需证明(1) 与(7) 等价，而(1)⇒(7) 是显然的，下面证明

"(7)⇒(1)" 由于 X 是有限维的空间，故可取$(e_1, \cdots, e_m)$ 为 $X^* = X$ 的一组基．依假设知$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(e_i, A_n) = \sigma(e_i, A)(1 \leqslant i \leqslant m)$，则知$\sup\limits_{n\geqslant\infty}\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\sigma(e_i, A_n) < \infty$，由支撑函数的凸性，正齐次性及有限维空间特征可得

$$\sup_{n\geqslant 1}\|A_n\| = \sup_{n\geqslant 1}\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sigma(x^*, A_n) < \infty$$

则必存在 $K \in \mathbf{P}_k(X)$，使得 $A_n \subset K(n \geqslant 1)$．由定理 1.4.9，任给 $n \geqslant 1$，及 $x_1^*, x_2^* \in X^*$

$$\begin{aligned}&|\sigma(x_1^*, A_n)) - \sigma(x_2^*, A_n)|\\ &\leqslant \|x_1^* - x_2^*\| \cdot \|K\|\end{aligned}$$

因此实值函数列$\{\sigma(x^*, A_n), n \geqslant 1\}$ 在 $\bar{S}(0,1)$ 上是等度连续

的，从而由(7)所给条件可知它一致收敛，依定理1.5.6知(1)成立.

定义 1.5.6 设$\{f_n, f, n \geqslant 1\}$为一族$X$上的广义实值凸的下半连续函数序列，称$\{f_n, f, n \geqslant 1\}$是等度下半连续的(equi-lower semicontinuous)，如果它满足：

(1) 任给$a > 0$及$x \in \mathrm{dom} f$，存在x的邻域U及正整数$N_x \geqslant 1$，使得$n \geqslant N_x$时，对任意的$y \in U$，有

$$f_n(x) - a \leqslant f_n(y)$$

(2) 任给$x \in \mathrm{dom} f$，存在正整数$N_x \geqslant 1$，使得$n \geqslant N_x$时恒有$x \in \mathrm{dom} f_n$.

(3) 任给紧集$A \subset (\mathrm{cldom} f)^c$，$\{f_n, n \geqslant 1\}$在$A$上一致趋近于$+\infty$.

定理 1.5.34 设$\{f_n, f, n \geqslant 1\}$为下半连续函数序列，则$(K)\mathrm{epi} f_n \to \mathrm{epi} f$的充要条件为

(1) 任给$x \in X$，存在$\{x_n, n \geqslant 1\} \subset X$，$x_n \to x$，且

$$\limsup_{n \to \infty} f_n(x_n) \leqslant f(x)$$

(2) 对于任意$\{x_{n_i}, i \geqslant 1\} \subset X$，若$x_{n_i} \to x$，则

$$\liminf_{n \to \infty} f_{n_i}(x_{n_i}) \geqslant f(x)$$

证明 首先证明

$\limsup_{n \to \infty} \mathrm{epi} f_n \subset \mathrm{epi} f$ 当且仅当条件(2)满足.

假设条件(2)满足，若$(x, a) \in \limsup_{n \to \infty} \mathrm{epi} f_n$，则存在$(x_{n_i}, a_{n_i}) \in \mathrm{epi} f_{n_i} (i \geqslant 1)$，使得$(x_{n_i}, a_{n_i}) \to (x, a)$，于是

$$f(x) \leqslant \liminf_{n \to \infty} f_{n_i}(x_{n_i}) \leqslant \lim_{n \to \infty} a_{n_i} = a$$

故$(x,a)\in \mathrm{epi}f$. 所以有$\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{epi}f_n \subset \mathrm{epi}f$.

反之,假设$\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{epi}f_n \subset \mathrm{epi}f$. 任意给定$\{x_{ni},i\geqslant 1\}\subset X$,$x_{ni}\to x$,则由于$(x_{ni},f_{ni}(x_{ni}))\in \mathrm{epi}f_{ni}(n\geqslant 1)$,故有

$$(x,\liminf_{n\to\infty} f_{ni}(x_{ni}))\in \mathrm{epi}f.$$

即知$\liminf\limits_{n\to\infty} f_{ni}(x_{ni})\geqslant f(x)$,条件(2)满足.

下面证明$\liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{epi}f_n\supset \mathrm{epi}f$ 当且仅当条件(1)满足.

假设条件(1)成立,若$(x,a)\in \mathrm{epi}f$,则$f(x)\leqslant a$. 因此存在$\{x_n,n\geqslant 1\}\subset X$,使得$\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)\leqslant f(x)\leqslant a$. 任给$\varepsilon>0$,存在$N\geqslant 1$,使得$n\geqslant N$时,$f_n(x_n)\leqslant a+\varepsilon$. 则$(x_n,a+\varepsilon)\in \mathrm{epi}f_n(n\geqslant N)$. 于是有

$$(x,a+\varepsilon)\in \liminf_{n\to\infty} \mathrm{epi}f_n$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{epi}f_n$是闭的,故知$(x,a)\in \liminf\limits_{n\to\infty}\mathrm{epi}f_n$,则

$$\mathrm{epi}f\subset \liminf_{n\to\infty} \mathrm{epi}f_n$$

反之,假设$\mathrm{epi}f\subset \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{epi}f_n$. 任给$x\in X$,则

$$(x,f(x))\in \mathrm{epi}f$$

故存在$(x_n,a_n)\in \mathrm{epi}f_n(n\geqslant 1)$,使得$(x_n,a_n)\to(x,f(x))$,于是

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x_n)\leqslant \lim_{n\to\infty} a_n = f(x)$$

即条件(1)成立.

定理 1.5.35 设$\{f_n,f,n\geqslant 1\}$是X上一族等度下半连续凸函数,则$(K)\mathrm{epi}f_n\to \mathrm{epi}f$ 当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)(x\in X)$.

证"充分性"　设 $x \in X$，取 $x_n = x$，由定理 1.5.12 知

$$f(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

由于 $(x, f(x)) \in \mathrm{epi} f = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{epi} f_n$，故存在 $(x_n, a_n) \in \mathrm{epi} f_n (n \geqslant 1)$，使 $(x_n, a_n) \to (x, f(x))$. 由于 $\{f_n, f, n \geqslant 1\}$ 等度下半连续，而 $x_n \to x$，所以依等度下半连续的定义知任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$，使 $(x_n, a_n) \to (x, f(x))$. 由于 $\{f_n, f, n \geqslant 1\}$ 等度下半连续，而 $x_n \to x$，所以依等度下半连续的定义知任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$，使得 $n \geqslant N$ 时，恒有 $f_n(x) \leqslant f_n(x_n) + \varepsilon \leqslant a_n + \varepsilon$，从而

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n + \varepsilon = f(x) + \varepsilon$$

所以 $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant f(x)$，于是有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

"必要性"　首先证明

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{epi} f_n \supset \mathrm{epi} f$$

任给 $(x, a) \in \mathrm{epi} f$，由于 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \leqslant a$，故任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$，使得 $n \geqslant N$ 时，$f_n(x) \leqslant a + \varepsilon$，即 $(x, a + \varepsilon) \in \mathrm{epi} f_n (n \geqslant N)$，所以 $(x, a + \varepsilon) \in \liminf_{n\to\infty} \mathrm{epi} f_n$. 由 $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{epi} f_n$ 的闭性及 ε 任意性即得 $(x, a) \in \liminf_{n\to\infty} \mathrm{epi} f_n$.

下面证明

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{epi} f_n \subset \mathrm{epi} f$$

设 $(x, a) \in \limsup_{n\to\infty} \mathrm{epi} f_n$，则存在 $(x_{n_i}, a_{n_i}) \in \mathrm{epi} f_{n_i} (i \geqslant 1)$，使得

$$(x_{n_i}, a_{n_i}) \to (x, a)$$

于是由$\{f_n, f, n \geqslant 1\}$的等度下半连续性可知对于任给$\varepsilon > 0$，存在$N \geqslant 1$，使得$i \geqslant N$时，恒有

$$f_{ni}(x) \leqslant f_{ni}(x_{ni}) + \varepsilon$$

从而知

$$f(x) - \varepsilon = \lim_{n \to \infty} f_{ni}(x) - \varepsilon$$

$$\leqslant \lim_{n \to \infty} f_{ni}(x_{ni}) \leqslant \lim_{n \to \infty} a_{ni} = a$$

则$f(x) \leqslant a$，从而$(x, a) \in \operatorname{epi} f$，即证.

定理1.5.36 设$\{A_n, A, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，则$(K)A_n \to A$当且仅当

$$(K)\operatorname{epi}\sigma(x, A_n) \to \operatorname{epi}\sigma(x, A)$$

证"必要性" 设$(x, a) \in \limsup\limits_{n \to \infty} \operatorname{epi}\sigma(x, A_n)$，则必然存在$(x_{ni}, a_{ni}) \in \operatorname{epi}\sigma(x_{ni}, A_{ni})(i \geqslant 1)$，使得$(x_{ni}, a_{ni}) \to (x, a)$. 任给$y \in A$，由于$(K)A_n \to A$，故存在$y_{ni} \in A_{ni}, y_{ni} \to y$. 由于对于任意给的$i \geqslant 1$，$\langle x_{ni}, y_{ni} \rangle \leqslant \sigma(x_{ni}, A_{ni}) \leqslant a_{ni}$，所以有$\langle x, y \rangle \leqslant a$. 依$y \in A$的任意性即知$(x, a) \in \operatorname{epi}\sigma(x, A)$，故

$$\limsup_{n \to \infty} \operatorname{epi}\sigma(x, A_n) \subset \operatorname{epi}\sigma(x, a)$$

同理可证

$$\operatorname{epi}\sigma(x, A) \subset \liminf_{n \to \infty} \operatorname{epi}\sigma(x, A_n).$$

"充分性" 设$y \in \limsup\limits_{n \to \infty} A_n$，则存在$y_{ni} \in A_{ni}(i \geqslant 1)$，使得$y_{ni} \to y$，于是对于任意$x \in X$，$\langle x, y_{ni} \rangle \leqslant \sigma(x, A_{ni})$. 由定理1.5.12知存在$x_{ni} \to x$，使得$\limsup\limits_{n \to \infty} \sigma(x_{ni}, A_{ni}) \leqslant \sigma(x, A)$. 因此，有

$$< x, y_{ni} > = \lim_{n\to\infty} < x_{ni}, y_{ni} >$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \sigma(x_{ni} A_{ni})$$

$$\leqslant \sigma(x, A)$$

所以 $x \in A$，即证 $\lim_{n\to\infty} \sup A_n \subset A$. 同理可证 $A \subset \lim_{n\to\infty} \inf A_n$.

推论 1.5.4 我们假设 $\{A_n, A, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，$\{\sigma(x, A_n), \sigma(x, A), n \geqslant 1\}$ 等度下半连续，则 $(K)A_n \to A$ 当且仅当任给 $x \in X$，$\lim_{n\to\infty} \sigma(x, A_n) = \sigma(x, A)$

证明 由定理 1.5.35、定理 1.5.36 即得.

[注] 定理 1.5.34 1.5.36 可推广到自反的 Banach 空间，参见 Mosco[65] 及 Salinetti and Wets[97].

§1.6 集值映射及其连续性

定义 1.6.1 设 $T \subset R$，称映射 $F: T \to \mathbf{P}_f(X)$ 为集值映射. 任给 $B \subset X$，记

$$F^+(B) = \{t \in T, F(t) \in I^+(B)\} = \{t \in T, F(t) \subset B\}$$

$$F^-(B) = \{t \in T, F(t) \in I^-(B)\} = \{t \in T, F(t) \cap B \neq \varnothing\}$$

集值映射的图定义作

$$\mathrm{Gr}F = \{(t, x) \in T \times X, x \in F(t)\}$$

定义 1.6.2 设 $F: T \to \mathbf{P}_f(X)$ 为集值映射，称 F 在 $t_0 \in T$ 处为

(1) 上半连续的(记作 u.s.c.)，如果 $F: T \to \mathbf{P}_f(X)$ 在上拓扑 $\mathbf{J}_u$ 意义下是连续的.

(2) 下半连续的(记作l.s.c.),如果$F:T\to\mathbf{P}_f(X)$在下拓扑$\mathbf{J}_l$意义下是连续的.

(3) 连续的,如果$F:T\to\mathbf{P}_f(X)$在Vietoris拓扑$\mathbf{J}_V$意义下是连续的.

定理 1.6.1 设$F:T\to\mathbf{P}_f(X)$为集值映射,则

(1) F在$t_0\in T$处是上半连续的当且仅当对于任意开集G,满足$F(t_0)\subset G$,存在$\delta>0$,使得$|t-t_0|<\delta$时,$F(t)\subset G$.

(2) F在$t_0\in T$处是下半连续的当且仅当对于任意开集G,满足$F(t_0)\cap G\neq\varnothing$,存在$\delta>0$,使得$|t-t_0|<\delta$时,$F(t)\cap G\neq\varnothing$.

(3) F在$t_0\in T$处是连续的当且仅当F在$t_0\in T$处既上半连续又下半连续.

证明 依上拓扑、下拓扑及Vietoris拓扑的定义易证.

定理 1.6.2 设$F:T\to\mathbf{P}_f(X)$为集值映射

(1) 若F在$t_0\in T$处上半连续,则任给$t_n\to t_0$,有

$$s\text{-}\limsup_{t_n\to t_0}F(t_n)\subset F(t_0).$$

(2) 若存在t_0的邻域V使得$\bigcup_{t\in V}F(t)$是相对紧的,且任给$t_n\to t_0$,$s\text{-}\limsup_{t_n\to t_0}F(t_n)\subset F(t_0)$,则$F$在$t_0$处上半连续.

证明 (1) 假设存在$x\in s\text{-}\limsup_{t_n\to t_0}F(t_n)\backslash F(t_0)$,由于$F(t_0)\in\mathbf{P}_f(X)$.故存在开集$G_1,G_2$,使得$G_1\cap G_2=\varnothing$,$F(t_0)\subset G_1$,且$x\in G_2$,但因为

$$x \in s\text{-}\limsup_{t_n \to t_0} F(t_n)$$

则$\{F(t_n), n \geqslant 1\}$必与$G_2$相交无穷多次，也就是说$\{F(t_n), n \geqslant 1\}$与$X\backslash G_1$相交无穷多次，这与$F$在$t_0 \in T$处上半连续矛盾，因此(1)成立.

(2)　假设F在t_0处不是上半连续的，则一定存在开集G以及$t_n \to t_0$，使得$F(t_0) \subset G$，但$F(t_n) \cap (X\backslash G) \neq \varnothing (n \geqslant 1)$，任取$x_n \in F(t_n) \in F(t_n) \cap (X\backslash G)(n \geqslant 1)$，由于存在$N \geqslant 1$，使得$\bigcup_{n \geqslant N} F((t_n))$相对紧，故存在$\{x_{nk}, k \geqslant 1\} \subset \{x_n, n \geqslant 1\}$，使得$(s)x_{nk} \to x$，则

$$x \in s\text{-}\limsup_{t_n \to t_0} F(t_n)$$

但由于$x_n \in F(t_n) \cap (X\backslash G)$，而$X\backslash G$为闭集，则知$x \in X\backslash G$，这说明$(s\text{-}\limsup_{t_n \to t_0} F(t_n)) \cap (X\backslash F(t_0)) \neq \varnothing$，与所给条件矛盾，故(2)成立.

定理 1.6.3　若设$F: T \to \mathbf{P}_f(X)$为集值映射，则下列命题等价

(1)　F在$t_0 \in T$处下半连续；

(2)　任给$t_n \to t_0$，$F(t_0) \subset s\text{-}\liminf_{t_n \to t_0} F(t_n)$.

证明　"(1)⇒(2)"假设$t_n \to t_0$，但存在

$$x \in F(t_0) \backslash (s\text{-}\liminf_{t_n \to t_0} F(t_n))$$

则存在$\varepsilon > 0$及$\{t_{nk}, k \geqslant 1\} \subset \{t_n, n \geqslant 1\}$使得$F(t_{nk}) \cap S(x, \varepsilon) = \varnothing (k \geqslant 1)$，且$F(t_0) \cap S(x, \varepsilon) = \varnothing$，这与$F$在$t_0$处下半连续矛盾，即可证明.

"(2)⇒(1)"假设存在开集$G\subset X$及$t_n\to t_0$，使得$F(t_0)\cap G\neq\varnothing$，而$F(t_n)\cap G=\varnothing(n\geqslant 1)$，任取$x\in F(t_0)\cap G$，则由于$F(t_n)\cap G=\varnothing$，故$x$不可能属于

$$s\text{-}\liminf_{t_n\to t_0} F(t_n)$$

与(2)的条件矛盾，证毕.

[注] 请注意定理1.6.2与定理1.6.3在形式上的差别，由此可以提炼出闭集值映射这一概念，即称集值映射$F:T\to\mathbf{P}_f(X)$是闭的，如果$\mathrm{Gr}F\in P_f(T\times X)$. 易证$F:T\to\mathbf{P}_f(X)$是闭的当且仅当任给$t_0\in T$

$$s\text{-}\limsup_{t_n\to t_0} F(t_n)\subset F(t_0).$$

定理1.6.4 设$F_1,F_2:T\to\mathbf{P}_f(X)$.

(1) 若F_1,F_2是上半连续的，则$F_1\cup F_2$也是上半连续的.

(2) 若F_1,F_2是下半连续的，则$F_1\cup F_2$也是下半连续的.

(3) 若F_1,F_2是闭的，$F_1\cup F_2$也是闭的.

证明 (1) 设$t_0\in T$，任给开集$G\subset X$，使得$F_1(t_0)\cup F_2(t_0)\subset G$. 由于$F_1,F_2$均上半连续，故存在$\delta_1,\delta_2>0$，使$|t-t_0|<\delta_i$时，$F_i(t)\subset G(i=1,2)$，令$\delta=\max(\delta_1,\delta_2)$，则$|t-t_0|<\delta$时，必有$F_1(t)\cup F_2(t)\subset G$.

(2) 与(1)的证明类似.

(3) 由于$\mathrm{Gr}(F_1\cup F_2)=\mathrm{Gr}F_1\cup\mathrm{Gr}F_2$，依定义知$F_1\cup F_2$是闭的.

定理1.6.5 设$F_1:T\to\mathbf{P}_f(X)$，$F_2:T\to\mathbf{P}_f(X)$为集值映射，使得$F_1(t)\cap F_2(t)\neq\varnothing(t\in T)$.

(1) 若F_1,F_2是上半连续的，则$F_1\cap F_2$也是上半连续的.

(2) 若F_1是闭的，F_2是上半连续的且$F_2(t)\in\mathbf{P}_k(X)(t\in T)$，则$F_1\cap F_2$是上半连续的.

(3) 若F_1是下半连续的，$F_2=\overline{S}(f(t),\beta)$，其中$\beta>0$为常数，$f:T\to X$是连续的，则$F_1\cap F_2$是下半连续的.

证明 (1) 设$t_0\in T$，任给开集$G\subset X$使得$F_1(t_0)\cap F_2(t_0)\subset G$，由于$F_1(t_0)$与$F_2(t_0)\backslash G$为不相交闭集，故存在不相交的开集$G_1$和$G'$使得$F_1(t_0)\subset G_1$，$F_2(t_0)\backslash G\subset G'$. 令$G_2=G\cup G'$，则$F_2(t_0)\subset G_2$，依假设$F_1,F_2$均是上半连续的，故存在$\delta_i>0$. 使得$|t-t_0|<\delta_i$时，$F_i(t)\subset G_i(i=1,2)$. 取$\delta=\max(\delta_1,\delta_2)$，则知$|t-t_0|<\delta$时，有

$$F_1(t)\cap F_2(t)\subset G_1\cap G_2\subset(X\backslash G')\cap(G\cup G')\subset G,$$

即证$F_1\cap F_2$是上半连续的.

(2) 设$t_0\in T$，任给开集$G\subset X$使得$F_1(t_0)\cap F_2(t_0)\subset G$，则$F_1(t_0)\backslash$与$F_2(t_0)\backslash G$为互不相交闭集且$F_2(t_0)\backslash G$是紧的，任给$x\in F_2(t_0)\backslash G$，由于$\mathrm{Gr}F_1$是闭的，而$(t_0,x)\notin\mathrm{Gr}F_1$，故存在$x$的邻域$U_x$及$\delta_x>0$，使得$|t-t_0|<\delta_x$时，$F_1(t)\cap U_x=\varnothing$. 依$F_2(t_0)\backslash G$的紧性知存在$\{U_{xi},1\leqslant i\leqslant m\}$使得$F_2(t_0)\backslash G\subset\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant m}U_{xi}$. 令$G'=\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant m}U_{xi}$，$\delta_1=\max(\delta_{xi},1\leqslant i\leqslant m)$. 则$|t-t_0|<\delta_1$时，必然有$F_1(t)\subset X\backslash G'$，我们令$G_2=G$

$\cup G'$，因 $F_2(t_0)\subset G_2$. 而 $F_2(t_0)\subset G_2$，而 F_2 是上半连续的，故存在 $\delta_2>0$，使得 $|t-t_0|<\delta_2$ 时，$F_2(t)\subset G_2$，最后，取 $\delta=\max(\delta_1,\delta_2)$，则 $|t-t_0|<\delta^*$时，有

$$
\begin{aligned}
F_1(t)\cap F_2(t) &\subset (X\backslash G')\cap G_2\\
&=(X\backslash G')\cap(G\cup G')\subset G.
\end{aligned}
$$

因此 $F_1\cap F_2$ 是上半连续的.

(3)　设 $t_0\in T$，任给 $t_n\to t_0$，首先证明

$$
\begin{aligned}
F(t_0)\cap(\text{int}F_2(t_0)) &= F_1(t_0)\cap S(f(t_0),\beta)\\
&\subset s\text{-}\liminf_{t_n\to t_0}(F_1(t_n)\cap F_2(t_n))
\end{aligned}
$$

任给 $x\in F_1(t_0)\cap S(f(t_0),\beta)$，令 $\|x-f(t_0)\|=\alpha$，而且 $\alpha<\beta,\epsilon=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$. 由于 F_1 下半连续，依定理 1.6.3 知存在 $x_n\in F_1(t_n)$，使$(s)x_n\to x$，则存在 $N_1\geqslant 1$，使得 $n\geqslant N_1$ 时，$\|x_n-x\|\geqslant\epsilon$. 依 $f:T\to X$ 的连续性，存在 $N_2\geqslant 1$，使 $n\geqslant N_2$ 时，$\|f(t_n)-f(t_0)\|\geqslant\epsilon$. 因此，当 $n\geqslant\max(N_1,N_2)$ 时，必有

$$
\begin{aligned}
\|x_n-f(t_n)\| &\leqslant \|x_n-x\|+\|x-f(t_0)\|\\
&\quad+\|f(t_0)-f(t_n)\|\leqslant\beta
\end{aligned}
$$

即 $x_n\in \bar{S}(f(t_n),\beta)=F_2(t_n)$，从而知

$$
F_1(t_0)\cap(\text{int}F_2(t_0))\subset s\text{-}\liminf_{t_n-t_0}(F(t_n)\cap F_2(t_n))
$$

由强下极限的闭性必有

$$
F_1(t_0)\cap F_2(t_0)\subset s\text{-}\liminf_{t_n-t_0}(F_1(t_n)\cap F_2(t_n))
$$

则依定理 1.6.3 知 $F_1\cap F_2$ 是下半连续的.

定理 1.6.6　设 $T\subset R$ 是紧的，$F:T\to \mathbf{P}_k(X)$ 为集值映

射. 若 F 是上半连续的,则 $t \in T$ 时 $F(t)$ 是紧的.

证明 任给 $\bigcup_{t \in T} F(t)$ 的一个开覆盖 $\{U_\delta, \delta \in D\}$ 为任意非空集,则它也是 $F(t) \in \mathbf{P}_k(X)$ 的开覆盖,故任给 $t \in T$,存在 $\{U_\delta, \delta \in D\}$ 中有限个元素的并 V_t,使得 $F(t) \subset V_t$. 设

$$W_t = \{s \in T, F(s) \subset V_t\}$$

则 $t \in W_t$,且依 F 的上半连续性知 $\{W_t, t \in T\}$ 是 $T \subset R$ 的开覆盖. 由于 $T \subset R$ 是紧的,则必然存在 $\{W_{ti}, 1 \leqslant i \leqslant m\}$,使得 $T = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} W_{ti}$,从而知 $\bigcup_{t \in T} F(t) \subset V_{ti}$. 即 $\{U_\delta, \delta \in D\}$ 存在有限子覆盖,定理得证.

定义 1.6.3 设 $F: T \to \mathbf{P}_f(X)$ 为集值映射,称 F 在 $t_0 \in T$ 处为

(1) h-上半连续的(记作 h.u.s.c.),如果 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得 $|t - t_0| < \delta$ 时,$F(t) \subset \varepsilon + F(t_0)$.

(1) h-下半连续的(记作 h.l.s.c.),如果 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得 $|t - t_0| < \delta$ 时,$F(t_0) \subset \varepsilon + F(t)$.

(3) h-连续的,如果 F 在 $t_0 \in T$ 处既 h-上半连续又 h-下半连续.

定理 1.6.7 设 $F(t)$ 为集值映射,若 F 在 $t_0 \in T$ 处为 u.s.c.,则 F 在 $t_0 \in T$ 处为 h.u.s.c..

证明 对于任给 $\varepsilon > 0$,由于 $F(t_0) \subset F(t_0) + \varepsilon$,而

$$F(t_0) + \varepsilon = \{x \in X, d(x, F(t_0)) < \varepsilon\}$$

为开集,故依据 F 在 t_0 处的上半连续性可知存在 $\delta > 0$,使得 $|t - t_0| < \delta$ 时, $F(t) \subset F(t_0) + \varepsilon$. 于是 F 在 t_0 处为 h-u.s.c..

定理 1.6.8 设 $F(t)$ 为集值映射，若 F 在 $t_0 \in T$ 处为 h.l.s.c，则 F 在 $t_0 \in T$ 处为 l.s.c. .

证明 任给开集 G，满足 $F(t_0) \cap G \neq \varnothing$，取 $x_0 \in F(t_0) \cap G$，则存在 $\varepsilon > 0$，使 $S(x_0, \varepsilon) \subset G$. 由于 F 在 $t_0 \in T$ 处为 h.l.s.c.，故存在 $\delta > 0$，使得 $|t - t_0| < \delta$ 时，$F(t_0) \subset F(t) + \frac{\varepsilon}{2}$，从而 $x_0 \in F(t) + \frac{\varepsilon}{2}$. 依 $F(t) + \frac{\varepsilon}{2}$ 的意义知存在 $a \in F(t)$，使 $d(x_0, a) < \varepsilon$，故 $a \in S(x_0, \varepsilon) \subset G$. 于是 $F(t) \cap G \neq \varnothing$，故 F 在 $t_0 \in T$ 处为 l.s.c..

定理 1.6.9 设 $F: T \to \mathbf{P}_k(X)$ 为集值映射，则

(1) F 在 $t_0 \in T$ 处为 u.s.c. 当且仅当 F 在 $t_0 \in T$ 处为 h.u.s.c.；

(2) F 在 $t_0 \in T$ 处为 l.s.c. 当且仅当 F 在 $t_0 \in T$ 处为 h.l.s.c.；

(3) F 在 $t_0 \in T$ 处是连续的当且仅当 F 在 $t_0 \in T$ 处是 h－连续的.

证明 依定理 1.3.15 即得.

定理 1.6.10 设 $F: T \to \mathbf{P}_{fc}(X)$，且任给 $t_0 \in T$，存在 t_0 的邻域 V，使得 $\bigcup_{t \in V} F(t)$ 为相对紧集. 若任给 $x^* \in X^*$，$\sigma(x^* F(t))$ 关于 $t \in T$ 连续，则 F 是 h- 连续的.

证明 设 $t_0 \in T, K \in \mathbf{P}_k(X)$. 使得 $\bigcup_{t \in V} F(t) \subset K$. 由定理 1.4.9 知任给 $t \in V$，$\sigma(x^*, F(t))$ 关于 $x^* \in X^*$ 是 bw^* - 连续的，下面证明 X^* 上的函数族 $\{\sigma(x^*, F(t)), t \in V\}$ 是等度

bw^*-连续的. 任给 $t \in V_m, x_1^*, x_2^* \in X^*$, 由 $F(t) \in \mathbf{P}_{k}(X)$, 故存在 $x_1 \in F(t) \subset K$, 使得 $< x_1^*, x_1 > = \sigma(x_1, F(t))$, 于是

$$\begin{aligned}
&\sigma(x_1^*, F(t)) - \sigma(x_2^*, F(t)) \\
&= < x_1^*, x_1 > - \sup\{< x_2^*, x >, x \in F(t)\} \\
&\leqslant < x_1^*, x_1 > - < x_2^*, x_1 > \\
&= < x_1^* - x_2^*, x_1 > \\
&\leqslant \sigma(x_1^* - x_2^*, F(t)) \\
&\leqslant \sigma(x_1^* - x_2, K)
\end{aligned}$$

同理可得

$$\sigma(x_2^*, F(t)) - \sigma(x_1^*, F(t)) \leqslant \sigma(x_2^* - x_1^*, K)$$

由于 $K \in \mathbf{P}_{k}(X)$, $\sigma(x^*, K)$ 关于 $x^* \in X^*$ 是 bw^*-连续的, 因此 $\{\sigma(x^*, F(t)), t \in V\}$ 是 X^* 上的等度 bw^*-连续函数族.

由于 $\sigma(x^*, F(t))$ 在 $t_0 \in T$ 处连续, $\{x^* \in X^*, \| x^* \| \leqslant 1\}$ 是 bw^* 紧的, 而 X^* 上函数族 $\{\sigma(x^*, F(t)), t \in V\}$ 等度 bw^*-连续, 因此对于任给 $t_n \to t_0$, $\sigma(x^*, F(t_n))$ 关于 $x^* \in \{x^* \in X^*, \| x^* \| \leqslant 1\}$ 一致收敛到 $\sigma(x^*, F(t_0))$, 从而由前面定理知 $(\delta) F(t_n) \to F(t_0)$, 即 F 在 t_0 处是 h-连续的.

定理 1.6.11　设 $F: T \to \mathbf{P}_{k}(R^n)$, 若任给 $x^* \in X^*$, $\sigma(x^*, F(t))$ 关于 $t \in T$ 连续, 则 F 是 h-连续的.

证明　依定理 1.5.33 即得.

在下面的三个定理中, 我们研究集值映射关于Banach空间 X 上的弱拓扑 $\sigma(X, X^*)$ 的连续性. 因此, 定理的叙述与证

明中所言及的连续，开集和闭集等概念意味着 X 上弱拓扑意义下的相应概念.

定理1.6.12 设 $T \subset R$ 是紧的，$F: T \to \mathbf{P}_{wk}(X)$ 为集值映射. 若 F 在弱拓扑 $\sigma(X, X^*)$ 意义下是上半连续的. 则 $\bigcup_{t \in T} F(t)$ 是弱紧的.

证明 完全类似于定理1.6.6的证明.

定理1.6.13 设 $F: T \to \mathbf{P}_{fc}(X)$，$F(t_0) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，则 $F(t)$ 在 $t_0 \in T$ 处关于弱拓扑u.s.c. 当且仅当任给 $x^* \in X^*$，$\sigma(x^*, F(t))$ 在 $t_0 \in T$ 处上半连续.

证明 "必要性"假设 $F(t)$ 在 $t_0 \in T$ 为u.s.c.，任取 $x^* \in X^*$，由于 $F(t_0) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，故 $\sigma(x^*, F(t_0)) < +\infty$，对于任意 $\alpha > \sigma(x^*, F(t_0))$，令 $U = \{x \in X, < x^*, x > < \alpha\}$，显然 U 为开集且 $F(t_0) \subset U$，故依假设存在 $\delta > 0$，使 $|t - t_0| < \delta$ 时，恒有 $F(t) \subset U$，即 $\sigma(x^*, F(t)) \leqslant \alpha$，从而知

$$\limsup_{t \to t_0} \sigma(x^*, F(t)) \leqslant \alpha$$

依 α 的任意性知

$$\limsup_{t \to t_0} \sigma(x^*, F(t)) \leqslant \sigma(x^*, F(t_0))$$

所以 $\sigma(x^*, F(t))$ 在 $t_0 \in T$ 处是上半连续的.

"充分性"假设任给 $x^* \in X^*$，$\sigma(x^*, F(t))$ 在 $t_0 \in T$ 处上半连续. 取 $x_0 \in F(t_0)$，令 $F'(t) = F(t) - x_0$，则 $\sigma(x^*, F'(t)) = \sigma(x^*, F(t)) - < x^*, x_0 >$. 基于以上事实，我们不妨假定 $\theta \in F(t_0)$. 设 U 为一包含 $F(t_0)$ 的弱开集，则存在 θ 的闭凸邻域

V，使得 $F(t_0)+V\subset U$，不妨设

$$V=\bigcap_{i=1}^{k}\{x\in X,<x_i^*,x>\leqslant 1\}$$

其中 $\{x_1^*,\cdots,x_k^*\}\subset X^*$. 由于 $F(t_0)\in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，故存在

$$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset F(t_0)$$

使得

$$F(t_0)\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{2}V)$$

令 $A=\mathrm{co}(x_1,\cdots,x_n)+V$，则 A 是闭的且 $A\subset U$，于是有

$$\sigma(x_j^*,F(t_0))\leqslant\sup_{i\leqslant k}\sigma(x_j^*,x_i+\frac{1}{2}V)<\sigma(x_j^*,A)$$

$$(j\leqslant k)$$

因 $\sigma(x^*,F(t))$ 在 $t_0\in T$ 处为u.s.c.，故存在 $\delta>0$，使得 $|t-t_0|<\delta$ 时，对于任给 $1\leqslant j\leqslant m$，有

$$\sigma(x_j^*,F(t))\leqslant\sigma(x_j^*,A)$$

所以当 $|t-t_0|<\delta$ 时，$F(t)\subset A\subset U$，即证 $F(t)$ 在 $t_0\in T$ 处为u.s.c..

定理 1.6.14　设 $F:T\to \mathbf{P}_{b/c}(X)$，且 $\bigcup_{t\in T}F(t)$ 是全有界的，则 $F(t)$ 在 $t_0\in T$ 处关于弱拓扑l.s.c. 当且仅当任意给定 $x^*\in X^*$，$\sigma(x^*,F(t))$ 在 $t_0\in T$ 处是下半连续的.

证明　"必要性" 假设 $F(t)$ 在 $t_0\in T$ 处为l.s.c.，设 $x^*\in X^*$，任给 $\alpha<\sigma(x^*,F(t_0))$，令

$$U=\{x\in X,<x^*,x>>\alpha\}$$

则 $F(t)\cap U\neq\varnothing$，故存在 $\delta>0$，使得 $|t-t_0|<\delta$ 时，恒有

$$F(t) \cap U \neq \varnothing$$

即 $\sigma(x^*, F(t)) > \alpha$，所以

$$\liminf_{t \to t_0} \sigma(x^*, F(t)) \geqslant \sigma(x^*, F(t_0))$$

从而知 $\sigma(x^*, F(t))$ 在 $t_0 \in T$ 处是下半连续的.

"充分性"假设 $\sigma(x^*, F(t))$ 在 $t_0 \in T$ 处下半连续. 任取开集 U，使得 $F(t_0) \cap U \neq \varnothing$，同定理 1.6.5 一样，不妨可以假设 $\theta \in F(t_0) \cap U$，且 U 为凸集.

假设 $F(t)$ 在 $t_0 \in T$ 处不是 l.s.c.，则存在序列 $\{t_n\} \subset T$，使得 $n \geqslant 1$，$F_n(t) \cap U = \varnothing$，于是依凸集分离定理知 $n \geqslant 1$，存在 $x^* \in X^*$，使得

$$F(t_n) \subset \{x \in X, \langle x_n^*, x \rangle \leqslant -1\}$$

$$U \subset \{x \in X, \langle x_n^*, x \rangle \geqslant -1\}$$

令 $U^0 = \{x^* \in X^*, \langle x^*, x \rangle \geqslant -1, x \in U\}$，则 $\{x_n^*\} \subset U^0$，且

$$\sigma(x_n^*, F(t_n)) \leqslant -1$$

由于 U^0 为 X^* 的等度连续子集，从而为 X^* 上的关于 X 上全有界集一致收敛的拓扑意义下的紧集，故 $\{x_n^*\}$ 存在上述拓扑意义下的收敛子列，极限点记为 z^*. 因为 $\bigcup_{t \in T} F(t)$ 全有界，故存在 $K \geqslant 1$，使 $k \geqslant K$ 时，恒有

$$\sigma(z^*, F(t)) \leqslant \sigma(x_{nk}^*, F(t)) + \frac{1}{2} \qquad (t \in T)$$

也就是说存在 $\{t_{nk}\} \subset \{t_n\}$，使 $t_{nk} \to t_0$，且

$$\sigma(z^*, F(t_{nk})) \leqslant \sigma(x_{nk}^*, F(t_{nk})) + \frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2} \quad (1.6.3)$$

但这与 $\sigma(z^*, F(t_0)) \geqslant 0$ 且 $\sigma(z^*, F(t))$ 在 $t_0 \in T$ 处下半连续矛盾. 所以 $F(t)$ 在 $t_0 \in T$ 处为 l. s. c. .

作为本节的结束，我们讨论集值映射的连续选择问题，设 $F: T \to \mathbf{P}_f(X)$ 为集值映射，称 $f: T \to X$ 为 F 的连续选择，如果 f 是连续的，且任给 $t \in T$，$f(t) \in F(t)$.

定义 1.6.3 设 T 为拓扑空间，$\{G_i, i \geqslant 1\}$ 是 T 的开覆盖，称 T 上的实值连续函数列 $\Phi_i: T \to [0,1]$ 为 $\{G_i, i \geqslant 1\}$ 的单位从属划分，如果任给 $i \geqslant 1$，$\Phi_i(t) = 0 (t \in T \setminus G_i)$，且 $\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(t) = 1 (t \in T)$.

定理 1.6.15 设 T 是正规的拓扑空间，$\{G_1, \cdots, G_n\}$ 是 T 的有限开覆盖，则 $\{G_1, \cdots, G_n\}$ 存在单位从属划分.

证明 首先，我们构造 T 的另一有限开覆盖 $\{V_1, \cdots, V_n\}$ 使其满足下列条件

(a) 任给 $1 \leqslant i \leqslant n$，$V_i \subset \mathrm{cl} V_i \subset G_i$，

(b) 任给 $1 \leqslant j \leqslant n$，集族 $\{V_i, 1 \leqslant i \leqslant j\} \cup \{G_i, j < i \leqslant n\}$ 依旧是 T 的一个开覆盖.

令 $C_1 = T \setminus (\bigcup_{i=2}^{n} G_i)$，则 C_1 是闭的，且 $C_1 \subset G_1$. 由于 T 是正规的，故存在开集 V_1，使得 $C_1 \subset V_1 \subset \mathrm{cl} V_1 \subset G_1$，且显然集族 $\{V_i, G_n; 2 \leqslant i \leqslant n\}$ 仍是 X 的开覆盖. 现在假定 $\{V_1, \cdots, V_k\}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 已构造出来，且集族 $\{V_i, 1 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{G_i, k < i \leqslant n\}$ 仍是 T 的开覆盖，令

$$C_{k+1} = T \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} V_i \cup \bigcup_{i=k+2}^{n} G_i) \subset G_{k+1}$$

再次利用 T 的正规性，存在开集 V_{k+1}，使得

$$C_{k+1} \subset V_{k+1} \subset \mathrm{cl}V_{k+1} \subset G_{k+1}$$

并且显然集族 $\{V_i, 1 \leqslant i \leqslant k+1\} \cup \{G_i, k+1 < i \leqslant n\}$ 仍是 T 的一个开覆盖，如此递归构造下去，即得 T 的开覆盖 $\{V_1, \cdots, V_n\}$ 满足条件(a)，(b).

由于 T 是正规的，而 $V_i \subset \mathrm{cl}V_i \subset G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，故存在实值连续函数 $\psi_i : T \to [0,1]$ 使 $t \in G\backslash G_i$ 时 $\psi_i(t) = 0$，而 $t \in V_i$ 时 $\psi_i = 1$. 令 $\Phi_i(t) = \psi_i(t)(\sum_{j=1}^{n} \psi_j(t))^{-1}$，则易知连续函数族 $\{\Phi_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 为 $\{G_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 的单位从属划分.

定理 1.6.16 设 $T \subset R$ 是紧的，$F : T \to \mathbf{P}_{fc}(X)$ 是下半连续的，则任给 $\beta > 0$，存在连续函数 $f : T \to X$，使得任给 $t \in T$，

$$f(t) \in \beta + F(t)$$

证明 任给 $x \in X$，令 $U_x = F_{*}(S(x,\beta))$，由于 F 是下半连续的，而 $S(x,\beta)$ 为开集，故 U_x 是 T 中的开集，且 $\{U_x, x \in X\}$ 是 T 的开覆盖. 依 $T \subset R$ 的紧性知存在有限子覆盖 $\{U_{x_i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$，从而依定理 1.6.15 知 $\{U_{x_i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 具有单位从属划分 $\{\Phi_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. 令

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(t) x_i, (t \in T)$$

则 $f : T \to X$ 是连续的，对于任意 $t \in T$，由于 $\Phi_i(t) x_i = 0$ 时必有 $t \in U_{x_i}$，从而 $x_i \in \beta + F(t)$. 故知 $f(t)$ 是凸集 $\beta + F(t)$ 中某些点的凸组合，所以

$$f(t) \in \beta + F(t)$$

定理1.6.17 设$T \subset R$是紧的,$F: T \to \mathbf{P}_{fc}(X)$是下半连续的,则$F$具有连续选择.

证明 我们首先递归构造满足下列条件的连续函数列$\{f_i, i \geqslant 1\}$:

(a) $f_i \in 2^{-i+2} + f_{i-1}(t), t \in T, i \geqslant 2$;

(b) $f_i \in 2^{-i} + F(t), t \in T, i \geqslant 1$.

对于$i = 1$,由定理1.6.16知存在连续函数$f_1: T \to$满足条件(b).假定$\{f_1, \cdots, f_n\}$已构造出来,设

$$F_{n+1}(t) = F(t) \cap (2^{-n} + f_n(t))$$

由于f_n满足条件(b),则$F_{n+1}(t) \in \mathbf{P}_{fc}(X)(t \in T)$,且依定理1.6.5和$F_{n+1}$也是下半连续的,对$F_{n+1}$我们可以应用定理1.6.16(取$\beta = 2^{-n-1}$)知存在连续函数$f_{n+1}: T \to X$,使得$f_{n+1}(t) \in 2^{-n-1} + F_{n+1}(t)(t \in T)$.因为$F_{n+1}(t) \subset F(t)$,故$f_{n+1}$满足条件(b),而由于$F_{n+1}(t) \subset 2^{-n} + F_n(t)$,因此$F_{n+1}(t) \in 2^{-n} + 2^{-n-1} + F_n(t) \subset 2^{-n+1} + F_n(t)$,即$F_{n+1}$满足条件(a).依归纳法知存在连续函数列$\{F_i, i \geqslant 1\}$满足条件(a)、(b).

对于上述$\{F_i, i \geqslant 1\}$,条件(a)意味着任给$i \geqslant 1$,

$$\sup_{t \in T} \| f_{i+1}(t) - f_i(t) \| < 2^{-i+1}$$

即$\{f_i, i \geqslant 1\}$是一致Gauchy列,因此存在连续函数$f: T \to X$,使得$\{f_i, i \geqslant 1\}$一致收敛到f.但条件(b)意味着任给$i \geqslant 1$

$$d(f_i(t), F(t)) < 2^{-i}$$

由 $F(t)$ 的闭性即知 $f(t) \in F(t)(t \in T)$. 因此 f 为 F 的连续选择.

第二章　集值随机变量及其积分

§2.1　集值随机变量的定义与运算

设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间，X为度量空间. 设$\mathbf{G}$为X中全体开集，$\mathbf{B}(X)=\sigma(\mathbf{G})$称作$X$上的Borel代数，称$\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)=\sigma\{A\times B,A\in\mathbf{A},B\in\mathbf{B}(X)\}$为$\Omega\times X$上的乘积$\sigma$代数，而称$\Omega\times X,\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$为乘积可测空间. 任给$A\subset\Omega\times X$，$A$在$\Omega$上的投影定义作

$$\mathrm{Pr}_{\Omega}(A)=\{w\in_{\Omega},\text{存在 } x\in X,\text{使得}(w,x)\in A\}$$

定义2.1.1　称集值映射$F:\Omega\to\mathbf{P}_f(X)$为强可测的，若任给$C\in\boldsymbol{P}_f(X)$有

$$F^{-1}(C)=\{w\in\Omega,F(w)\cap C\neq\varnothing\}\in\mathbf{A}$$

称集值映射$F:\Omega\to\boldsymbol{P}_f(X)$为可测的，若任给开集$G$有

$$F^{-1}(G)=\{w\in\Omega,F(w)\cap G\neq\varnothing\}\in\mathbf{A}$$

可测的集值映射称作集值随机变量或随机集.

[注]　事实上，定义2.1.1对任意集值映射$F:\Omega\to P(X)$均有效，特别地如果允许F取空集为其值，则上述定义自然蕴含着$\{w,F(w)=\varnothing\}=\{w,F(w)\cap X=\varnothing\}\in\mathbf{A}$.

定理2.1.1　强可测集值映射必为集值随机变量.

证明　设$F:\Omega\to\mathbf{P}(X)$是强可测的. 任给开集$G(\neq$

X)，令

$$C_n = \{x \in X, d(x, G^c) \geqslant \frac{1}{n}\}$$

由于 $G^c \in \mathbf{P}_f(X)$，$d(x, G^c)$ 为 x 的连续函数，故 C_n 为闭集，且

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

从而易证

$$\begin{aligned} F^{-1}(G) &= F^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \\ &= \{w, F \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \neq \varnothing\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{w, F(w) \cap C_n \neq \varnothing\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{-1}(C_n) \in \mathbf{A} \end{aligned}$$

当 $G = X$ 时，显然 $F^{-1}(G) = F^{-1}(X) = \Omega \in \mathbf{A}$，定理得证.

定理2.1.2 若假定 $F: \Omega \to \mathbf{P}_f(X)$ 是集值随机变量，则 $d(x, F(w))$ 是可测的($x \in X$).

证明 任给 $\alpha \in R^+$，由于

$\{w, d(x, F(w)) < \alpha\} = \{w, F(w) \cap S(x, \alpha) \neq \varnothing\} \in \mathbf{A}$

故 $d(x, F(w))$ 是可测的.

定理2.1.3 若 X 为可分的度量空间，$F: \Omega \to \mathbf{P}_f(X)$ 满足 $d(x, F(w))$ 是 $\mathbf{A}$ 可测的($x \in X$)，则 F 为集值随机变量.

证明 由于 X 是可分的，故对于任意开集 $G \subset X$，存在点列 $\{x_n\} \subset G$，$\alpha_n > 0$，使得 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(x_n, \alpha_n)$，从而

$$F^{-1}(G)=\bigcup_{n=1}^{\infty}F^{-1}(S(x_n,\alpha_n))$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{w,d(x_n,F(w))<\alpha_n\}\in \mathbf{A}$$

故 $F(w)$ 为集值随机变量．

定理 2.1.4 设 X 为可分的度量空间，$F:\Omega\to\mathbf{P}_f(X)$ 为集值随机变量，则 F 的图

$$\mathrm{Gr}F=\{(w,x)\in\Omega\times X,x\in F(w)\}\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$$

证明 设 $\{x_n,n\geqslant 1\}$ 为 X 的稠密点列，固定 $\alpha\geqslant 1$，定义函数 $d_\alpha(w,x)=d(x_n,F(w))$，当

$$(w,x)\in\Omega\times[S(x_n,\frac{1}{\alpha})\setminus\bigcup_{m<n}S(x_m,\frac{1}{\alpha})]$$

时，由于

$$\{(w,x),d_\alpha(x,w)<b\}$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{w,d(x_n,F(w))<b\}$$

$$\times[S(x_n,\frac{1}{\alpha})\setminus\bigcup_{m<n}S(x_m,\frac{1}{\alpha})]$$

$$\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X).$$

所以 $d_\alpha(w,x)$ 是 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$ 可测的，从而

$$d(x,F(w))=\lim_{\alpha\to\infty}d_\alpha(w,x)$$

是 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$ 可测的，故

$$\mathrm{Gr}F=\{(w,x),d(x,F(w))=0\}\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$$

引理 2.1.1 设 $(\Omega,\mathbf{A},\mu)$ 为完备的 σ- 有限测度空间，X 为完备的可分度量空间，则任给 $G\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$，$\mathrm{Pr}_\Omega(G)\in\mathbf{A}$.

定理 2.1.5 设$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$为完备的测度空间,X为完备的可分度量空间,若$F:\Omega\to\mathbf{P}_f(X)$的图$\mathrm{Gr}F\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$,则任给$B\in\mathbf{B}(X)$,$F^{-1}(B)\in\mathbf{A}$.

证明 由于

$$\begin{aligned}F^{-1}(B)&=\{w,F(w)\cap B\neq\varnothing\}\\&=\{w,(w,x)\in\mathrm{Gr}F\cap(\Omega\times B)\}\\&=\mathrm{Pr}_{\Omega}(\mathrm{Gr}F\cap(\Omega\times B))\end{aligned}$$

而$\mathrm{Gr}F\cap(\Omega\times B)\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$,故$F^{-1}(B)\in\mathbf{A}$.

综合上面的论述,我们得到下述结论:

定理 2.1.6 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间,X为可分的度量空间.$F:\Omega\to\mathbf{P}_f(X)$为集值映射,考虑下列命题:

(1) 任给 Borel 子集$B\subseteq X$,$F^{-1}(B)\in\mathbf{A}$;

(2) F是强可测的;

(3) F是可测的;

(4) 任给$x\in X$,$d(x,F)$是可测的;

(5) $\mathrm{Gr}F\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$,

则(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5),且(3)与(4)等价.若进一步X是完备的,并且存在一个σ有限的测度,使得$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$为完备的测度空间,则上述五个命题全部等价.

定理 2.1.7 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间,X为可分的度量空间,$F:\Omega\to\mathbf{P}_k(X)$为集值映射,则下列命题等价:

(1) F是$(\Omega,\mathbf{A})$到度量空间$(\mathbf{P}_k(X),\delta)$上的可测映射;

(2) F是强可测的;

(3) F 是可测的.

证明 "(1)⇒(2)" 任给闭集 $C \subset X$，则 $X\backslash C$ 为开集，若将 F 看成 Ω 到 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 上的映射，则有

$$\{w, F(w) \cap C \neq \varnothing\} = \Omega\backslash\{w, F(w) \subset X\backslash C\}$$
$$= \Omega\backslash F^{-1}(I^*(X\backslash C))$$

若(1) 成立，则依定理 1.3.16 可得 $F^{-1}(I^*(X\backslash C)) \in \mathbf{A}$，从而知 $F^{-1}(C) \in \mathbf{A}$，故 F 是强可测的.

"(2)⇒(3)" 由定理 2.1.1 可得.

"(3)⇒(1)" 若 F 是可测的，则对于任意开集 $G \subset X$，有

$$\{w, F(w) \cap G \neq \varnothing\} \in \mathbf{A}$$

因此，若将 F 看作 Ω 到 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 上的映射，则对于任给开集 $G \subset X$，必有

$$F^{-1}(I^*(G)) = \{w, F(w) \cap G \neq \varnothing\} \in \mathbf{A}$$

故依定理 1.3.16 可知(1) 成立.

引理2.1.2 设 X 为可分的Banach空间，$C \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，则一定存在 X^* 中的可数点列 $\{x_n^*, n \geqslant 1\}$，使得

$$C = \bigcap_{n\geqslant 1}\{x \in X, < x_n^*, x > \leqslant \sigma(x_n^*, C)\}$$

证明 依定理 1.4.7 知

$$C = \bigcap_{x^* \in X^*}\{x \in X, < x^*, x > < \sigma(x^*, C)\}$$

令 $H(x^*) = \{x \in X, < x^* x > > \sigma(x^*, C)\}$，则 $H(x^*)$ 为强开集，且

$$X\backslash C = \bigcup_{x^* \in X^*} H(x^*)$$

由于 X 是可分的，$X\backslash C$ 为开集，$\{H(x^*), x^* \in X^*\}$ 为 $X\backslash C$ 的

开覆盖，故依拓扑学中Lindelof定理知$X\backslash C$存在可数子覆盖，即存在可数点列$\{x_n^*, n\geqslant 1\}\subset X^*$使得$X\backslash C=\bigcup_{n\geqslant 1}H(x_n^*)$，故知

$$C=\left(\bigcup_{n\geqslant 1}H(x_n^*)\right)^c$$
$$=\bigcap_{n\geqslant 1}\{x\in X, <x_n^*, x>\leqslant\sigma(x_n^*, C)\}$$

引理 2.1.3 设X为可分的Banach空间，$C\in\mathbf{P}_{fc}(X)$，则一定存在单调降的弱开集列$\{V_n, n\geqslant 1\}$使得$C=\bigcap_{n\geqslant 1}V_n$.

证明 依引理2.1.2知存在可数点列$\{x_n^*, n\geqslant 1\}\subset X^*$，使得

$$C=\bigcap_{n\geqslant 1}\{x\in X, <x_n^*, x>\leqslant\sigma(x_n^*, C)\}$$

对于固定的$n\geqslant 1, m\geqslant 1$，令

$$H_{mn}=\{x\in X, <x_n^*, x><\sigma(x_n^*, C)+\frac{1}{m}\}$$

则G_{mn}为弱开集，且显然有$C=\bigcup_{m,n\geqslant 1}H_{mn}$. 对可数弱开集列$\{H_{m,n}, m,n\geqslant 1\}$重新排列，记作$\{H_n, n\geqslant 1\}$. 令

$$V_n=\bigcap_{1<k<n}H_k$$

则V_n为弱开集，$V_n\supset V_{n+1}$，且$C=\bigcap_{n\geqslant 1}V_n$.

定理 2.1.8 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间，X为可分的Banach空间，$F:\Omega\to\mathbf{P}_{wk}(X)$为集值映射，则下列命题等价：

(1) F是可测的；

(2) 任给弱开集$V\subseteq X$，$F^{-1}(V)\in\mathbf{A}$.

证明 “(1)⇒(2)”由于Banach空间中弱开集必是强开

集，因此，(1) 成立时，(2) 必成立.

"(2)⇒(1)" 依定理 2.1.3，仅需证明任给 $x \in X$，$d(x, F(w))$ 是可测的. 但由于

$$\{w, d(x, F(w)) < \alpha\} = \{w, F(w) \cap \overline{S}(x, \alpha) \neq \varnothing\},$$

故仅需证明任给 $C \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，$F^{-1}(C) \in \mathbf{A}$. 依引理 2.1.3，存在单调降的弱开集列 $\{V_n, n \geqslant 1\}$ 使得 $C = \bigcap\limits_{n \geqslant 1} V_n$，而依(2) 所给条件知 $F^{-1}(V_n) \in \mathbf{A}(n \geqslant 1)$，下面证明

$$F^{-1}(C) = \bigcap_{n \geqslant 1} F^{-1}(V_n)$$

$F^{-1}(C) \subset \bigcap\limits_{n \geqslant 1} F^{-1}(V_n)$ 是显然的. 为证相反的包含关系，设 $w \in \bigcap\limits_{n \geqslant 1} F^{-1}(V_n)$，则 $F(w) \cap V_n \neq \varnothing (n \geqslant 1)$. 取 $x_n \in F \cap V_n (n \geqslant 1)$，则 $\{x_n, n \geqslant 1\} \subset F(w) \in \mathbf{P}_{wk}(X)$，从而存在收敛子列 $\{x_{nk}, k \geqslant 1\}$，使得 $(w) x_{nk} \to x \in F(w)$. 依引理 2.1.3 中 $\{V_n, n \geqslant 1\}$ 的构造及弱收敛的定义可知 $x \in C = \bigcap\limits_{n \geqslant 1} V_n$，因此 $F(w) \cap C \neq \varnothing$，从而得知

$$\bigcap_{n \geqslant 1} F^{-1}(V_n) \subset F^{-1}(C)$$

定理得证.

下面讨论集值随机变量的可测选择问题，首先，我们给出 Banach 空间值函数可测的定义及基本性质. 设 $(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ 为测度空间，X 为 Banach 空间. 称 X 值函数 $f : \Omega \to X$ 是简单函数，如果存在 $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$，以及 Ω 的 $\mathbf{A}$ 可测划分 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 使得 $f(w) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$，其中 χ_{A_i} 为 A_i 的示性函数. 称 X 值函数 $f : \Omega \to X$ 是强可测的，如果存在 X 值简单函数列 $\{f_n, n$

$\geqslant 1\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n(w) - f(w) \| = 0 \quad (\text{a. e.})$$

称 X 值函数 $f:\Omega\to X$ 是弱可测的，如果任给 $x^*\in X^*$，实值函数 $< x^*, f(w) >$ 是可测的．下面的引理给出了强可测 X 值函数常用的性质，详细证明可参阅 Diestel and Uhl [29] 以及胡迪鹤[20].

引理 2.1.4 (1) 若 $f:\Omega\to X$ 强可测的，则 $\|f(w)\|$ 可测．

(2) $f:\Omega\to X$ 是强可测的当且仅当 f 弱可测且存在 $N\in \mathbf{A}$，$\mu(N)=0$，使 $f(\Omega\backslash N)$ 是 X 中的可分子集．特别地，若 X 是可分的 Banach 空间，则 $f:\Omega\to X$ 强可测当且仅当 f 弱可测．

(3) $f:\Omega\to X$ 是强可测的当且仅当存在取值于 X 的可数集的可测函数列 $\{f_n, n\geqslant 1\}$ 以及 $N\in\mathbf{A}$，$\mu(N)=0$，使得在 $w\in\Omega\backslash N$ 上一致地有 $\lim_{n\to\infty}\|f_n(w)-f(w)\|=0$.

(4) 若 $f:\Omega\to \mathbf{P}_f(X)$ 是强可测的，则存在 X 值函数列 $\{f_n, n\geqslant 1\}$ 使得 $\|f_n(w)\|\leqslant 2\|f(w)\|$，且

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n(w) - f(w) \| = 0 \quad (\text{a. e.})$$

定义 2.1.2 设 $(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ 为测度空间，X 为可分 Banach 空间，$F:\Omega\to\mathbf{P}_f(X)$，为集值随机变量，$f:\Omega\to X$ 为强可测函数，称 f 为 F 的强可测选择，如果任给 $w\in\Omega$，$f(w)\in F(w)$. 称 f 为 F 的 a. e. 强可测选择，如果 $f(w)\in F(w)$ (a. e.).

定理 2.1.9 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间,X为可分的 Banach 空间,$F:\Omega\to\mathbf{P}_f(X)$为集值随机变量,则$F$必有强可测选择.

证明 设$\{x_n,n\geqslant 1\}$为X的可数稠密子集,下面我们构造一列在$\{x_n,n\geqslant 1\}$上取值的强可测函数$\{f_k,k\geqslant 1\}$,满足下列条件:

(a) 任给$k\geqslant 1,w\in\Omega,d(f_k(w),F(w))<2^{-k}$

(b) 任给$k\geqslant 1,w\in\Omega,\|f_{k+1}-f_k(w)\|<2^{-k+1}$

首先,令$i(1,w)=\inf\{n,F(w)\cap S(x_n,2^{-1})\neq\varnothing\}$,定义

$$f_1(w)=x_{i(1,w)}=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\chi_{(i(1,w)=n)}$$

则由于

$$\{w,i(1,w)=n\}$$
$$=F^{-1}(S(x_n,2^{-1}))\backslash(\bigcup_{1\leqslant m\leqslant n}F^{-1}(S(x_m,2^{-1}))\in\mathbf{A}$$

故f_1是强可测的,且显然有$d(f_1(w),F(w))<2^{-1}$. 假定$\{f_1,\cdots,f_k\}$已构造好,令$A_j=\{w,f_k(w)=x_j\}$,则$A_j\in\mathbf{A}$,$\bigcup_{j\geqslant 1}A_j=\Omega$,并且由条件(a)知

$$A_j\subset\{w,F(w)\cap S(x_j,2^{-k})\neq\varnothing\}$$

固定$j\geqslant 1$,令

$$i(k,j,w)=\inf\{n,F(w)\cap S(x_j,2^{-k})\cap S(x_n,2^{-(k+1)})$$
$$\neq\varnothing\}$$

则当$w\in A_j$时,$1\leqslant i(k,j,w)<+\infty$. 定义

$$f_{k+1}(w)=\sum_{j=1}^{\infty}x_{i(k,j,w)}\chi_{Ai}$$

则由于$\{w, f_{k+1}(w) = x_n\} = \bigcup_{j\geq 1}(A_j \cap \{w, i(k,j,w) = n\})$，而类似于$\{w, f_{k+1}(w) = x_n\} \in \mathbf{A}$的证明可证$\{w, i(k,j,w) = n\} \in \mathbf{A}$，故$f_{k+1}$是强可测的．$f_{k+1}$显然满足条件(a)，(b)．这就证明了存在取值于$\{x_n, n \geq 1\}$上的$X$值强可测函数列$\{f_k, k \geq 1\}$满足条件(a)，(b)．由条件(b)、引理2.1.4(3)以及X的完备性知存在强可测函数$f: \Omega \to X$使得$\lim_{k\to\infty} \| f(w) - f_{k+1}(w) \| = 0 (w \in \Omega)$，而由条件(a)可知$f(w) \in F(w) (w \in \Omega)$，即$f$是$F$的强可测选择．

定理 2.1.10　设$(\Omega, \mathbf{A})$为可测的空间，X为可分的Banach空间，$F: \Omega \to \mathbf{P}_f(X)$为集值映射，则下列命题等价

(1) F为集值随机变量；

(2) 存在一列F的强可测选择$\{f_n, n \geq 1\}$使得

$$F(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geq 1\}, w \in \Omega$$

证明　"(1)⇒(2)"假定F为集值随机变量，令$\{x_n, n \geq 1\}$为X的可数稠密子集，固定$m, n \geq 1$，定义新的集值函数如下：

$$F_{mn}(w) = \begin{cases} \mathrm{cl}(F(w) \cap S(x_m, 2^{-n})), & \text{若 } w \in A_{mn} \\ F(w), & \text{若 } w \notin A_{mn} \end{cases}$$

其中$A_{mn} = \{w, F(w) \cap S(x_m, 2^{-n}) \neq \varnothing\}$．由于$A_{mn} \in \mathbf{A}$，而依引理1.3.3，对于任意开集$G \subseteq X$，有

$$A_{mn} \cap \{w, \mathrm{cl}(F(w) \cap S(x_m, 2^{-n})) \cap G \neq \varnothing\}$$
$$= A_{mn} \cap \{w, F_{mn}(w) \cap S(x_m, 2^{-n}) \cap G \neq \varnothing\} \in \mathbf{A}$$

因此

$F_{mn}^{-1}(G) = \{w, F_{mn}(w) \cap G \neq \varnothing\}$

$$= (A_{mn} \cap F^{-1}(S(x_m, 2^{-n}) \cap G)) \cup (A_{mn}^c \cap F^{-1}(G)) \in$$

则 F_{mn} 为集值随机变量. 于是,依定理 2.1.9 知 F_{mn} 存在强可测选择,记作 f_{mn}. 下面证明,对任给 $\omega \in \Omega$, $\{f_{mn}(w), m, n \geq 1\}$ 稠密于 $F(w)$. 任给 $x \in F(w)$ 及 $n \geq 1$,必存在 $x_m \in \{x_n, n \geq 1\}$ 使得 $\| x_m - x \| < 2^{-n}$,从而 $F(w) \cap S(x_m, 2^{-n}) \neq \varnothing$. 于是由 F_{mn} 的定义知 $f_{mn}(w) \in \overline{S}(x_m, 2^{-n})$,从而

$\| f_{mn}(w) - x \| \leqslant \| f_{mn}(w) - x_m \| + \| x_m - x \| < 2^{-n+1}$

故知 $\{f_{mn}(w), m, n \geq 1\}$ 稠密于 $F(w)$,(2) 得证.

"(2)⇒(1)" 若存在 F 的一列强可测选择 $\{f_n, n \geq 1\}$ 使得

$$F(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geq 1\}, w \in \Omega$$

则对于任意的 $x \in X$,由于 $\| x - f_n(w) \|$ 均是可测的,故

$$d(x, F(w)) = \inf\{ \| x - f_n(w) \|, n \geq 1\}$$

是可测的,从而依定理 2.1.3 知 F 为集值随机变量.

[注] 满足定理 2.1.10 条件的强可测 X 值函数列也称作集值随机变量 F 的 Castaing 表示,上述定理为集值函数可测性的证明提供了非常方便的工具.

推论 2.1.1 设 F, F_1, F_2 为集值随机变量,则

(1) $d(x, F(w))$ 可测($x \in X$);

(2) $h(x, F(w))$ 可测($x \in X$);

(3) $\| F(w) \|$ 可测;

(4) $\delta(F_1, F_2)$ 可测;

(5) $\sigma(x^*, F(w))$ 可测($x^* \in X^*$).

证明 记$F(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geqslant 1\}$, $F_1(w) = \mathrm{cl}\{g_n(w), n \geqslant 1\}$, $F_2(w) = \mathrm{cl}\{h_n(w), n \geqslant 1\}$，则有

$$d(x, F(w)) = \inf\{d(x,y), y \in F(w)\} = \inf_{n \geqslant 1}\{d(x, f_n(w))\}$$

$$h(x, F(w)) = \sup\{d(x,y), y \in F(w)\} = \sup_{n \geqslant 1}\{d(x, f_n(w))\}$$

$$\| F(w) \| = \sup\{\|x\|, x \in F(w)\} = \sup_{n \geqslant 1} \| f_n(w) \|$$

$$\delta(F_1(w), F_2(w)) = \max\{\sup_{m \geqslant 1} \inf_{n \geqslant 1} d(g_n, h_m), \sup_{n \geqslant 1} \inf_{m \geqslant 1} d(g_n, h_m)\}$$

$$\sigma(x^*, F) = \sup_{n \geqslant 1} \sigma(x^*, f_n(w))$$

从而易证结论成立.

推论 2.1.2 设 F, F_1, F_2 为集值随机变量，$\alpha \in R$，则

$$(\alpha F)(w) = \alpha \cdot F(w)$$

$$(F_1 + F_2)(w) = \mathrm{cl}(F_1 + F_2)$$

为集值随机变量.

证明 设$F(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geqslant 1\}$, $F_1(w) = \mathrm{cl}\{g_n(w), n \geqslant 1\}$, $F_2(w) = \mathrm{cl}\{h_n(w), n \geqslant 1\}$，则

$$(\alpha F)(w) = \{\alpha f_n(w), n \geqslant 1\}$$

$$(F_1 + F_2)(w) = \mathrm{cl}\{g_n(w) + h_m(w), m, n \geqslant 1\}$$

显然结论成立.

推论 2.1.3 若 F 是集值随机变量，则$\overline{\mathrm{co}}F$ 也是集值随机

变量.

证明 设$F(w)=\mathrm{cl}\{f_n(w),n\geqslant 1\}$,令

$$U=\{f,f=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i,\alpha_i \text{为非负有理数},\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1,m\geqslant 1\}$$

则U为可数集,且显然有$\overline{\mathrm{co}}F(w)=\mathrm{cl}\{f(w),f\in U\}$,因此$\overline{\mathrm{co}}F$是集值随机变量.

定理 2.1.11 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间,X为任意度量空间,若$\{F_n,n\geqslant 1\}$为一列集值随机变量,则$F(w)=\mathrm{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n(w))$为集值随机变量.

证明 由引理1.3.3,对于任意开集$G\subseteq X$,有

$$\begin{aligned}F^{-1}(G)&=\{w,\mathrm{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n(w))\cap G\neq\varnothing\}\\&=\{w,(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n(w))\cap G\neq\varnothing\}\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{w,F_n(w)\cap G\neq\varnothing\}\in\mathbf{A}\end{aligned}$$

故F为集值随机变量.

定理 2.1.12 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测的空间,X为Banach的空间,$F_n:\Omega\to\mathbf{P}_{wk}(X)$为集值随机变量.若$F(w)=\mathrm{cl}_w(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n(w))\in\mathbf{P}_{wk}(X)(w\in\Omega)$,则$F$为集值随机变量,其中$\mathrm{cl}_w$表示弱拓扑意义下的闭包.

证明 类似于定理2.1.11的证法,只是此时要用到定理2.1.8,并注意到在弱拓扑上与引理1.3.3相应的结果依然

成立．

定理 2.1.13 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间，X为可分的度量空间，$F_n:\Omega\to\mathbf{P}_f(X)$为集值随机变量，则$\mathrm{Gr}(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n)\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$．若进一步$X$是完备的，且存在$\sigma$-有限测度，使得$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$为完备的测度空间，则$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$为集值随机变量，特别地，

$$\{w,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}F_n(w)=\varnothing\}\in\mathbf{A}$$

证明 依定理 2.1.6 知$\mathrm{Gr}(F_n)\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$ $(n\geqslant 1)$，而显然有

$$\mathrm{Gr}(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{Gr}(F_n)$$

故前一部分结论成立．当X完备且$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$为完备的σ-有限测度空间时，同样由定理 2.1.6 知$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$为集值随机变量．特别地，我们得到

$$\{w,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}F_n(w)=\varnothing\}=\mathrm{Pr}_{\Omega}((\Omega\times X)\backslash\mathrm{Gr}(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n))\in\mathbf{A}$$

定理 2.1.14 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间，X为可分的 Banach 空间，若$F_i:\Omega\to\mathbf{P}_k(X)$是集值随机变量$(i=1,2)$，则$F_1\cap F_2$也是集值随机变量．

证明 依定理 2.1.7 知F_1,F_2均是强可测的，对于任给闭集$C\subset X$，设

$$F_1^*(w)=F_1(w)\cap C,F_2^*(w)=-F_2(w)$$

则F_1^*,F_2^*是强可测的，从而依推论 2.1.2 知$F_1^*+F_2^*$为集值随机变量，故有

$$\{w,0\in F_1^*(w)+F_2^*(w)\}$$

$$= \{w, d(0, F_1^* + F_2^*) \leqslant 0\} \in \mathbf{A}$$

但由于任给 $w \in \Omega, F_1(w) \cap F_2(w) \cap C \neq \varnothing$ 当且仅当

$$0 \in F_1^*(w) + F_2^*(w)$$

所以

$$(F_1 \cap F_2)^{-1}(C) = \{w, F_1(w) \cap F_2(w) \cap C \neq \varnothing\}$$
$$= \{w, 0 \in F_1^*(w) + F_2^*(w)\} \in \mathbf{A}$$

故 $F_1 \cap F_2$ 是强可测的，从而是集值随机变量．

定理 2.1.15 设$(\Omega, \mathbf{A})$为可测空间，X 为可分的 Banach 空间，$F_n : \Omega \to \mathbf{P}_k(X)$ 为集值随机变量$(n \geqslant 1)$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 为集值随机变量．

证明 依定理2.1.14，任给$m \geqslant 1$，$\bigcap_{n=1}^{m} F_n$ 是强可测的，任给闭子集，$C \subset X, w \in \Omega$，依 $F_n(w)$ 的紧性，$(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(w)) \cap C \neq \varnothing$ 当且仅当任给 $m \geqslant 1$，$(\bigcap_{n=1}^{m} F_n(w)) \cap C \neq \varnothing$，因此

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)^{-1}(C) = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\bigcap_{n=1}^{m} F_n)^{-1}(C) \in \mathbf{A}$$

故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 是集值随机变量．

定理 2.1.16 设$(\Omega, \mathbf{A})$为可测的空间，X 是有限维 Banach 空间，$F_n : \Omega \to \mathbf{P}_f(X)$ 为集值随机变量，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 为集值随机变量．

证明 任给 $x \in X$ 及 $\alpha \in R$，依定理 2.1.2 知 $d(x, F_n)$ 是可测的，从而$\{w, F_n \cap \overline{S}(x, \alpha) \neq \varnothing\} = \{w, d(x, F_n) \leqslant \alpha\} \in \mathbf{A}$. 因为 X 是有限维的，则 $\overline{S}(x, \alpha)$ 是紧的，故类似于定理

2.1.14 及定理 2.1.15 可证下列两结论成立：

(a) 任给 $m \geqslant 1$，$\{w, (\bigcap_{n=1}^{m} F_n(w)) \cap \overline{S}(x,\alpha) \neq \varnothing\} \in \mathbf{A}$；

(b) $(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)^{-1}(\overline{S}(x,\alpha)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{-1}(\overline{S}(x,\alpha)) \in \mathbf{A}$.

由结论(b) 得知 $\{w, d(x, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) \leqslant \alpha\} \in \mathbf{A}$，即 $d(x, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)$ 是可测的，于是依定理 2.1.3 知 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 为集值随机变量.

定理 2.1.17 设$(\Omega, \mathbf{A})$为可测空间，$F_n: \Omega \to \mathbf{P}_{wk}(X)$ 为集值随机变量，有 $F_{n+1}(w) \subset F_n(w)$ $(w \in \Omega, n \geqslant 1)$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 为集值随机变量.

证明 首先证明任给 $x \in X, \alpha \in R$，

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)^{-1}(\overline{S}(x,\alpha)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{-1}(\overline{S}(x,\alpha))$$

显然，左边包含于右边，假设 $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{-1}(\overline{S}(x,\alpha))$，则 $F_n(w) \cap \overline{S}(x,\alpha) \neq \varnothing$ $(n \geqslant 1)$，从而可取 $x_n \in F_n \cap \overline{S}(x,\alpha)$. 由于 $\{x_n, n \geqslant 1\} \subset F_1(w) \in \mathbf{P}_{wk}(X)$，故存在子列 $\{x_{nk}, k \geqslant 1\}$，使得 $(w) x_{nk} \to x_0$，从而 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(w)$，而且可以有 $x_0 \in \overline{S}(x,\alpha)$，即 $(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(w)) \cap \overline{S}(x,\alpha) \neq \varnothing$，故右边包含于左边. 但由于 F_n 为集值随机变量，故 $d(x, F_n)$ 可测，从而 $F_n^{-1}(\overline{S}(x,\alpha)) \neq \varnothing$，即 $(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(w)) \cap \overline{S}(x,\alpha) \neq \varnothing$，故右边包含左边. 但因 F_n 为集值随机变量，故 $d(x, F_n)$ 可测，从而 $F_n^{-1}(\overline{S}(x,\alpha)) \in \mathbf{A}$ 也就是说 $d(x, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)$ 可测，则依定理 2.1.3 知 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 为集值随机变量.

定理2.1.18 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间,X为可分的Banach空间,$\sigma:\Omega\to R$可测,$x^*\in X^*$,则

$$F_1(w)=\{x\in X,<x^*,x>\leqslant\sigma(w)\}$$

$$F_2(w)=\{x\in X,<x^*,x>\geqslant\sigma(w)\}$$

均为集值随机变量.

证明 任给$y\in X,\alpha\in R$,令

$$r_1=\inf\{<x^*,x>,x\in S(y,\alpha)\}$$

下面证明

$$\{w,F_1(w)\cap S(y,\alpha)=\varnothing\}=\{w,\sigma(w)\leqslant r_1\}$$

显然,左边包含于右边,假设$w\notin\{w,F_1(w)\cap S(y,\alpha)=\varnothing\}$,则依引理1.3.3知$w\in\{w,G(w)\cap S(y,\alpha)\neq\varnothing\}$,其中$G(w)=\{x\in X,<x^*,x><\sigma(w)\}$,故有,$x_0\in S(y,\alpha)$,使得$<x^*,x_0><\sigma(w)$,从而$r_1<\sigma(w)$,即$w\notin\{w,\sigma(w)\leqslant r_1\}$,因此知右边包含于左边,所以有

$$\{w,d(y,F_1(w))>\alpha)\}=\{w,\sigma(w)\leqslant r_1\}\in\mathbf{A}$$

故$d(y,F)$是可测的,从而F_1为集值随机变量.

定理2.1.19 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间,X为可分的Banach空间,$F:\Omega\to\mathbf{P}_{bfc}(X)$为集值映射,并且有任意给定$x^*\in X^*$,$\sigma(x^*,F)$是可测的,如果下列两条件之一满足

(1) X^*是可分的;

(2) 任给$w\in\Omega,F(w)\in\mathbf{P}_{wkc}(X)$,

则F为集值随机变量.

证明 为证F为集值随机变量,仅需证明任给$x\in X$,

$d(x,F)$ 可测．下面按定理所给两条件分别讨论：

(1) 若 X^* 为可分的，则存在$\{x_n^*, n \geq 1\}$ 为 X^* 的闭单位球的稠密点列．依定理 1.4.9 及推论 1.4.3，任给 $x \in X$，必有

$$d(x,F(w)) = \delta_u(F(w),\{x\})$$

$$= \max(0, \sup_{\|X^*\| \leq 1} (< x^*, x > - \sigma(x^*, F(w)))$$

$$= \max(0, \sup_{n \geq 1} (< x_n, x > - \sigma(x_n^*, F(w)))$$

故 $d(x,F)$ 是可测的，则 F 为集值随机变量．

(2) 如果 $F(w) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)(w \in \Omega)$，则依定理 1.4.9，$\sigma(x^*, F(w))$ 存在关于 X^* 在 Mackey 拓扑 $m(X^*, X)$ 意义下的稠密点列$\{x_n^*\}$，依推论 1.4.2，任给 $x \in X$，必有

$$d(x,F(w)) = \delta_u(F(w),\{x\})$$

$$= \max(0, \sup_{\|x^*\| \leq 1} (< x_n^*, x > - \sigma(x^*, F(w)))$$

$$= \max(0, \sup_{n \geq 1} (< x_n^*, x > - \sigma(x_n^*, F(w)))$$

故 $d(x,F)$ 可测，从而 F 为集值随机变量．

§ 2.2 集值随机变量的可积选择空间 S_F^1

在本节及第三节中，除非特别说明，我们恒假定$(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ 为 σ 有限测度空间，X 为可分的 Banach 空间．

首先，我们给出 X 值可测函数 $f: \Omega \to X$ 积分的定义及基本性质．X 值简单函数 $f(w) = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$ 的 Bochner 积分定

义作

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i)$$

设 $f:\Omega \to X$ 可测，如果存在简单函数列 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| f_n - f \| d\mu = 0$$

则称 f 为 Bochner 可积的，此时定义 f 的 Bochner 积分为

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu$$

对于 $A \in \mathbf{A}$，定义

$$\int_A f d\mu = \int_\Omega \chi_A f d\mu$$

下面我们说明上述 Bochner 积分的定义与简单函数列 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 的选取无关. 假设 $\{f_n, n \geqslant 1\}$、$\{g_n, n \geqslant 1\}$ 为简单函数列，且满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| f_n - f \| d\mu = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| g_n - f \| d\mu = 0$$

则显然 $\{\int_\Omega f_n d\mu, n \geqslant 1\}$，$\{\int_\Omega g_n d\mu, n \geqslant 1\}$ 均为 X 中 Cauchy 列.

令

$$h_n(w) = \begin{cases} f_n(w), & n \text{ 为奇数} \\ g_n(w), & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

则易证 $\{\int_\Omega h_n d\mu, n \geqslant 1\}$ 为 X 的 Cauchy 列. 由于 X 是完备的，

而$\{\int_\Omega f_n d\mu, n\geqslant 1\}$，$\{\int_\Omega g_n d\mu, n\geqslant 1\}$均为$\{\int_\Omega h_n d\mu, n\geqslant 1\}$的子列，故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n d\mu$$

这就说明了如果f为Bochner可积的，则它的Bochner积分唯一.

定理 2.2.1 $f:\Omega\to X$ 为 Bochner 可积的当且仅当 $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$.

证明 见 Diestel and Uhl[29]p. 45.

关于X值可测函数的Bochner积分有以下性质：

(1) 若$\{f_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$Bochner可积的，$\alpha_i\in R, i\leqslant n$，则$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$是Bochner可积的，且有

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_\Omega f_i d\mu;$$

(2) 若$f(w)$是Bochner可积的，$\{A_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$为$A$的可测划分，则

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f d\mu;$$

(3) 若$f(w)$是Bochner可积的，则

$$\left\| \int_\Omega f d\mu \right\| \leqslant \int_\Omega \|f\| d\mu;$$

(4) 若$u:\Omega\to R$为一可积函数，则对于任意$x\in X$，有

$$\int_\Omega u(w) x d\mu = x\int_\Omega u(w) d\mu.$$

设

$$L^1[\Omega,\mathbf{A},\mu,X] = \{f: \Omega \to X, f \text{ 为 } \mathbf{A} \text{ 可测且 Bochner 可积}\}$$

则 $L^1[\Omega,\mathbf{A},\mu,X]$ 为 Banach 空间，范数定义为

$$\| f \|_1 = \int_\Omega \| f(w) \| d\mu$$

在不致引起误解情形下，简记作 $L^1[\Omega,X]$.

用 $\mu[\Omega,\mathbf{A},\mu,X]$ 表示 $\mathbf{A}$ 可测集值随机变量全体，在不致引起误解情形下，简记作 $\mu[\Omega,X]$. 沿用 § 1.2 记号，记

$$\mu_{(b)f(c)}[\Omega;X] = \{F \in \mu[\Omega,X], F(w) \in \mathbf{P}_{(b)f(c)}(X) \quad \text{a.e.}\}$$

$$\mu_{(w)k(c)}[\Omega;X] = \{F \in \mu[\Omega,X], F(w) \in \mathbf{P}_{(w)k(c)}(X) \quad \text{a.e.}\}$$

定义 2.2.1 集值随机变量 $F \in \mu[\Omega,X]$ 的可积选择空间定义为

$$S_F^1 = \{f \in L^1[\Omega,X], f(w) \in F(w) \quad \text{a.e. } \mu\} \tag{2.2.1}$$

定理 2.2.2 设 $F \in \mu[\Omega,X]$，则 S_F^1 为 $L^1[\Omega,X]$ 的闭子集.

证明 设 $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset S_F^1$，$\| f_n - f \|_1 \to 0$，则 $f \in L^1[\Omega,X]$，类似于实值情形，任给 $\epsilon > 0$，有

$$\mu\{w, \| f_n - f \| \geqslant \epsilon\} \to 0$$

进一步存在子列 $\{f_{n_i}, i \geqslant 1\}$ 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{n_i}(w) = f(w) \quad \text{a.e.}$$

故 $f(w) \in F(w)$ a.e.，所以 $f \in S_F^1$. 即证 S_F^1 为 $L^1[\Omega,X]$ 中

闭子集.

定理 2.2.3 设 $F \in \mu[\Omega, X]$, $S_F^1 \neq \varnothing$, 则存在 $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset S_F^1$ 使得

$$F(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geqslant 1\}.$$

证明 依定理2.1.10, 存在可测函数列 $\{g_n, n \geqslant 1\}$ 使得

$$F(w) = \mathrm{cl}\{g_n(w), n \geqslant 1\}$$

由于 μ 是 σ- 有限的, 故存在 Ω 的可数可测划分 $\{A_n, n \geqslant 1\}$, 使得 $\mu(A_n) < \infty$. 又因 $S_F^1 \neq \varnothing$, 可取 $f \in S_F^1$, 令

$$B_{jmk} = \{w, m - 1 \leqslant \| g_j(w) \| \leqslant m\} \cap A_k$$

$$f_{jmk} = x_{B_{jmk}} g_j(w) + x_{B_{jmk}^c} f(w) \quad (j, m, k \geqslant 1)$$

则易证 $\{f_{jmk}, j, m, k \geqslant 1\} \subset S_F^1$, 且

$$F(w) = \mathrm{cl}\{f_{jmk}(w), j, m, k \geqslant 1\}$$

推论 2.2.1 设 $F_1, F_2 \in \mu[\Omega, X]$, $S_{F_1}^1 \neq \varnothing$, $S_{F_2}^1 \neq \varnothing$, 则

$$F_1(w) = F_2(w) \quad (\text{a.e.})$$

当且仅当 $S_{F_1}^1 = S_{F_2}^1$.

证明 "必要性"显然.

"充分性"若 $S_{F_1}^1 = S_{F_2}^1 \neq \varnothing$, 则存在 $\{f_n\} \subset S_{F_1}^1$, $\{g_n\} \subset S_{F_2}^1$, 使

$$F_1(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geqslant 1\}$$

$$F_2(w) = \mathrm{cl}\{g_n(w), n \geqslant 1\}$$

所以 $F_1(w) = \mathrm{cl}\{f_n, g_n, n \geqslant 1\} = F_2(w)$.

定理 2.2.4 设 $F \in \mu[\Omega, X]$, $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset S_F^1$, 且

$$F(w) = \mathrm{cl}\{f_n, n \geqslant 1\}$$

则对于任给 $f \in S_F^1$ 及 $\varepsilon > 0$，存在 Ω 的可测有限划分 $\{A_1, \cdots, A_n\}$，使得

$$\| f - \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} f_i \|_1 \leqslant \varepsilon$$

证明 不妨假设 $f(w) \in F(w)(w \in \Omega)$. 取 $\rho: \Omega \to R^+$，使得

$$\int_\Omega \rho d\mu < \frac{\varepsilon}{3}$$

令

$$B_1 = \{w, \| f(w) - f_1(w) \| < \rho(w)\}$$

$$B_n = \{w, \| f(w) - f_n(w) \| < \rho(w)\} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$$

则 $\{B_n, n \geqslant 1\}$ 为 Ω 的可测可数划分.

由于 $\int_\Omega \| f \| d\mu < \infty$，故存在 n，使

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{B_i} \| f \| d\mu < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{B_i} \| f_1 \| d\mu < \frac{\varepsilon}{3}$$

令

$$A_1 = B_1 \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i), A_j = B_j \quad (2 \leqslant j \leqslant n)$$

则 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 为 Ω 的可测有限划分，且

$$\| f - \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} f_i \|_1 = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} \| f(w) - f_i(w) \| d\mu$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{B_i} \| f(w) - f_1(w) \| d\mu$$

$$\leqslant \int_{\Omega} \rho d\mu + \sum_{i=n+1}^{\infty} \int_{B_{i}} (\| f(w) \| + \| f_1(w) \|) d\mu$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

定理 2.2.5 设 $F_1, F_2 \in \mu[\Omega, X], S_{F_1}^1, S_{F_2}^1 \neq \varnothing, F(w) = \mathrm{cl}(F_1(w) + F_2(w))$. 则 $S_F^1 = \mathrm{cl}(S_{F_1}^1 + S_{F_2}^1)$.

证明 因为 $S_{F_1}^1 \neq \varnothing, S_{F_2}^1 \neq \varnothing$，故存在 $\{f_{1i}, i \geqslant 1\} \subset S_{F_1}^1$ 及 $\{f_{2j}, j \geqslant 1\} \subset S_{F_2}^1$，使得 $F_1 = \mathrm{cl}\{f_{1i}, i \geqslant 1\}, F_2 = \mathrm{cl}\{f_{2j}, j \geqslant 1\}$. 于是，有

$$F(w) = \mathrm{cl}(F_1(w) + F_2(w))$$
$$= \mathrm{cl}\{f_{1i}(w) + f_{2j}(w), i, j \geqslant 1\}$$

对于 $f \in S_F^1$ 及 $\varepsilon > 0$，依定理 2.2.4，存在 Ω 的可测有限划分 $\{A_k\}$ 及正整数 $i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_n$ 使得

$$\| f - \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(f_{1i_k} - f_{2j_k}) \|_1 < \varepsilon$$

故 $S_F^1 \subset \mathrm{cl}(S_{F_1}^1 + S_{F_2}^1)$，而 $\mathrm{cl}(S_{F_1}^1 + S_{F_2}^1) \subset S_F^1$ 是显然的.

定理 2.2.6 若 $F \in \mu[\Omega, X], S_F^1 \neq \varnothing, \alpha \in R$，则

$$S_{\alpha F}^1 = \alpha S_F^1 \tag{2.2.2}$$

证明 显然.

定理 2.2.7 若 $F \in \mu[\Omega, X], S_F^1 \neq \varnothing, \xi: \Omega \to R$ 可测且一致有界，则

$$S_{\xi F}^1 = \xi S_F^1 \tag{2.2.3}$$

证明 若 $f \in S_F^1$，则 $g = \xi f \in S_{\xi F}^1$，故知 $\xi S_F^1 \subset S_{\xi F}^1$

反之，若 $g \in S_{\xi F}^1$，令 $A_n = \{w, |\xi(w)| > \frac{1}{n}\}, A = \{w,$

$\xi(w) \neq 0\}$ 取 $f(w) \in S_F^1$，定义

$$f_n(w) = \begin{cases} g(w)/\xi(w), & w \in A_n \\ f(w), & w \notin A_n \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

则任给 $n \geq 1, f_n \in S_F^1$，且

$$\xi f_n(w) = \begin{cases} g(w), & w \in A_n \\ \xi f(w), & w \notin A_n \end{cases}$$

由于 $w \notin A$ 时，$g(w) = \zeta(w)F(w) = 0$，所以

$$\{w, \| \zeta f_n(w) - g(w) \| \neq 0\} \subset A_n^c \backslash A^c$$

但因为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A, A_n$ 单调增，则知

$$\mu\{w, \| \xi f_n(w) - g(w) \| \neq 0\} \leqslant \mu(A_n^c \backslash A^c) \to 0$$

由于 $\| \xi f_n(w) - g(w) \| \leqslant |\xi(w)| \| f(w) \| \in L^1$ 所以

$$\int_\Omega \| \xi f_n(w) - g(w) \| d\mu \to 0$$

即 $\| \xi f_n - g \|_1 \to 0$. 但由于 $\xi f_n \in \xi S_F^1$，而 ξS_F^1 为闭集，故知 $g \in \xi S_F^1$.

定理 2.2.8 设 $F \in \mu[\Omega, X]$，$(\overline{\mathrm{co}}F)(w) = \overline{\mathrm{co}}F(w)$，则 $\overline{\mathrm{co}}F \in \mu[\Omega, X]$. 若 $S_F^1 \neq \varnothing$，则

$$S_{\overline{\mathrm{co}}F}^1 = \overline{\mathrm{co}} S_F^1 \qquad (2.2.4)$$

其中 $\overline{\mathrm{co}} S_F^1$ 表示在 $L^1[\Omega, X]$ 中的闭凸包.

证明 记 $G(w) = \overline{\mathrm{co}}F(w)$，由于 $F \in \mu[\Omega, X]$，故存在 $\{f_n, n \geq 1\}$ 使得 $F(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geq 1\}$. 令

$$U = \{g, g = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i, \alpha_i \geq 0 \text{ 有理数}, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, m \geq 1\}$$

则$G(w) = \text{cl}\{g(w), g \in U\}$，因为$U$中元素个数可数，所以知$G \in \mu[\Omega, X]$.

依定理2.2.3，取上述$\{f_n, n \geq 1\} \subset S_F^1$，则知$U \subset S_G^1$. 任给$f \in S_{\text{co}F}^1 = S_G^1$及$\varepsilon > 0$，依定理2.2.4，存在$\Omega$的可测有限划分$\{A_1, \cdots, A_n\}$及$\{g_1, \cdots, g_n\} \subset U$，使

$$\| f - \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} g_k \|_1 < \varepsilon$$

依U的结构可知存在正整数m，使得$g_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{k_i} f_i \quad (1 \leq k \leq n)$，其中$\alpha_{k_i} \geq 0$，$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k_i} = 1$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} g_k = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k_i} f_i)$$

$$= \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_n \leq m} (\alpha_{1i_1}, \cdots, \alpha_{mi_n}) (\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} f_{ik}) \in \text{co} S_F^1$$

所以$f \in \overline{\text{co}} S_F^1$，即知$S_{\text{co}F}^1 \subset \overline{\text{co}} S_F^1$. 由于$S_F^1 \subset S_{\text{co}F}^1$，而$S_{\text{co}F}^1$为闭凸集，故$\overline{\text{co}} S_F^1 \subset S_{\text{co}F}^1$. 定理得证.

推论2.2.2 设$F \in \mu[\Omega, X]$，$S_F^1 \neq \varnothing$，则S_F^1是凸的当且仅当F几乎处处凸.

证明 依定2.2.8可知，S_F^1是凸的等价于$S_{\text{co}F}^1 = S_F^1$，从而依推论2.2.1知S_F^1是凸的当且仅当$\overline{\text{co}} F = F$(a.e.)，即$F$几乎处处凸.

定义2.2.3 子集$M \subset L^1[\Omega, X]$称作可分解的，若任给$f_1, f_2 \in M$及$A \in \mathbf{A}$，$\chi_A f_1 + \chi_{A^c} f_2 \in M$.

定理 2.2.9 设 M 为 $L^1[\Omega,X]$ 中非空闭子集，则 M 是可分解的当且仅当存在 $F \in \mu[\Omega,X]$，使 $M = S_F^1$.

证明 "充分性"显然.

"必要性" 设 M 为 $L^1[\Omega,X]$ 中可分解的非空闭集. 首先由 X 的可分性，存在 $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset L^1[\Omega,X]$，使得 $X = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geqslant 1\}$. 令

$$\alpha_i = \inf\{\| f_i - g \|_1, g \in M\}$$

选择 $\{g_{ij}, j \geqslant 1\} \subset M$，使 $\| f_i - g_{ij} \|_1 \to \alpha_i$，记

$$F(w) = \mathrm{cl}\{g_{ij}, i, j \geqslant 1\}$$

则 $F \in \mu[\Omega,X]$，下证 $S_F^1 = M$.

任给 $f \in S_F^1$，依定理 2.2.4，存在 Ω 的可测划分 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 及 $\{h_1, \cdots, h_n\} \subset \{g_{ij}, i, j \geqslant 1\}$，使

$$\| f - \sum_{k=1}^{n} x_{A_k} h_k \|_1 < \varepsilon$$

而 M 是可分解的闭集，故 $\sum_{k=1}^{n} x_{A_k} h_k \in M$，从而 $f \in M$，所以 $S_F^1 \subset M$.

假设 $S_F^1 \neq M$，则存在 $f \in M, A \in \mathbf{A}, \mu(A) > 0$ 及 $\delta > 0$，使得 $w \in A$ 时

$$\inf_{i,j} \| f(w) - g_{ij}(w) \| \geqslant \delta$$

固定 i，令

$$B = A \cap \{w, \| f(w) - f_i(w) \| < \frac{\delta}{3}\}$$

不妨设 $\mu(B) > 0$，令

$$g_j' = \chi_B f + \chi_{B^c} g_{ij}, j \geqslant 1$$

则$\{g_j'\} \subset M$，且 $w \in B$ 时

$$\| f_i(w) - g_{ij}(w) \|$$

$$\geqslant \| f(w) - g_{ij} \| - \| f(w) - f_i(w) \| > \frac{2\delta}{3}$$

所以

$$\| f_i - g_{ij} \|_1 - \alpha_i$$

$$\geqslant \| f_i - g_{ij} \|_1 - \| f_i - g_j' \|_1$$

$$= \int_B \| f_i(w) - g_{ij}(w) \| d\mu$$

$$- \int_B \| f_i(w) - g_j'(w) \| d\mu$$

$$\geqslant \frac{\delta}{3} \cdot \mu(B) > 0, j \geqslant 1$$

从而$\lim\limits_{j\to\infty} \| f_i - g_{ij} \|_1 > \alpha_i$，这与$\{g_{ij}\}$的取法矛盾，故$S_F^1 = M$.

定理2.2.10 设$\mathbf{P}_{bfc}[L^1[\Omega, X]]$表示$L^1[\Omega, X]$中可分解的非空有界闭集凸全体，则它在 Hausdorff 度量意义下完备．特别地若$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega, X]$，$\{S_{F_n}^1, n \geqslant 1\}$为Cauchy 列，则存在$F \in \mu[\Omega, X]$，使

$$\delta(S_{F_n}^1, S_F^1) \to 0$$

证明 设$\{M_n, n \geqslant 1\}$为$\mathbf{P}_{bfc}[L^1[\Omega, X]]$中Cauchy 列．由于

$$\mathbf{P}_{bfc}[L^1[\Omega, X]] \subset \mathbf{P}_{bf}[L^1[\Omega, X]]$$

而$\mathbf{P}_{bf}[L^1[\Omega, X]]$在 Hausdorff 度量意义下完备，故存在$M \in$

$\mathbf{P}_{bf}[L^1[\Omega,X]]$，使得 $\delta(M_n,M)\to 0$. 依定理 1.2.6 知，

$$M=\bigcap_{n\geqslant 1}\overline{\bigcup_{m\geqslant n}M_m}$$

所以 $M\in\mathbf{P}_{bfd}[L^1[\Omega,X]]$，即证 $\mathbf{P}_{bfd}[L^1[\Omega,X]]$ 的完备性.

特别地，若取 $M_n=S^1_{F_n}$，则依定理 2.2.7，存在 $F\in\mu[\Omega,X]$，使得 $M=S^1_F$，而且有 $\delta(S^1_{F_n},S^1_F)\to 0$.

§2.3 集值随机变量的积分

定义 2.3.1 设 $F\in\mu[\Omega,X]$，F 的积分定义为

$$\int_\Omega Fd\mu=\{\int_\Omega fd\mu,f\in S^1_F\} \tag{2.3.1}$$

其中 $\int_\Omega fd\mu$ 为 f 的 Bochner 积分. 对于任给 $A\in\mathbf{A}$，记

$$\int_A Fd\mu=\int_\Omega F\chi_A d\mu=\{\int_A fd\mu,f\in S^1_F\}$$

其中

$$F\chi_A(w)=\begin{cases}F(w),w\in A\\ \{0\},w\notin A\end{cases}$$

若 $\int_\Omega Fd\mu\neq\varnothing$，则称 F 可积，若 $\int_\Omega\|F(w)\|d\mu<\infty$，则称 F 可积有界. 用 $L^1_f[\Omega,X]$ 表示可积有界的集值随机变量全体，如同超空间的记号，下标 f 可换成 fc,bfc,wkc 等符号，表示在相应的超空间取值的可积有界集值随机变量(见第一章§1.2).

定理 2.3.1 $F\in\mu[\Omega,X]$ 可积当且仅当 $d(0,F(w))\in L^1_+(\Omega)$.

证明 "必要性"若 F 可积,则 $S_F^1 \neq \varnothing$. 设 $f \in S_F^1$,则

$$d(0,F(w)) \leqslant d(0,f(w)) = \| f \| \in L_+^1(\Omega)$$

"充分性"令 $g(w) = d(0,F(w))$, $F(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geqslant 1\}$, f_n 可测,则

$$g(w) = \inf_{n \geqslant 1} \| f_n(w) \|$$

取正值随机变量 $\delta(w)$ 使 $\int_\Omega \delta d\mu = \varepsilon > 0$. 令

$$A_1 = \{w, \| f_1(w) \| < g(w) + \delta(w)\}$$

$$A_n = \{w, \| f_n(w) \| < g(w) + \delta(w)\} \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$$

则 $A_n, n \geqslant 1$ 为 Ω 的可测可数划分,令

$$f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(w) f_n(w)$$

则

$$\begin{aligned}\int_\Omega \| f \| d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \| f_n \| d\mu \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} g d\mu + \int_\Omega \delta(w) d\mu \\ &= \int_\Omega g(w) d\mu + \varepsilon < \infty\end{aligned}$$

由于 $f(w) \in F(w)$ $(w \in \Omega)$,且 $\int_\Omega \| f \| d\mu < \infty$,故 $f \in S_F^1$,从而知 S_F^1 非空.

定理 2.3.2 若 $F \in \mu_{fc}[\Omega, X]$,则 $\int_\Omega F d\mu$ 是凸集.

证明 若 $F(w) \in \mu_{fc}[\Omega, X]$,则 S_F^1 为 $L^1[\Omega, X]$ 中凸集,

依 Bochner 积分性质易证 $\int_{\Omega} F d\mu$ 为凸集.

定理 2.3.3 设 F_1, F_2, F 为可积的集值随机变量,则

(1) $\mathrm{cl}\int_{\Omega} \overline{\mathrm{co}} F d\mu = \overline{\mathrm{co}} \int_{\Omega} F d\mu$;

(2) $\mathrm{cl}\int_{\Omega} (F_1 + F_2) d\mu = \mathrm{cl}\left(\int_{\Omega} F_1 d\mu + \int_{\Omega} F_2 d\mu\right)$.

证明 (1) 首先依定理 2.3.2, $\mathrm{cl}\int_{\Omega} \overline{\mathrm{co}} F d\mu$ 为凸集,所以

$$\overline{\mathrm{co}} \int_{\Omega} F d\mu \subset \mathrm{cl}\int_{\Omega} \overline{\mathrm{co}} F d\mu$$

另一方面,对于任给 $x \in \int_{\Omega} \overline{\mathrm{co}} F d\mu$,由于 $S^1_{\overline{\mathrm{co}}F} = \overline{\mathrm{co}} S^1_F$,所以存在 $f \in \overline{\mathrm{co}} S^1_F$,使 $x = \int_{\Omega} f d\mu$. 若 $f \in \mathrm{co} S^1_F$,则存在 $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset S^1_F$,使 $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$,所以 $x = \int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\Omega} f_i d\mu \in \mathrm{co}\int_{\Omega} F d\mu$. 若 $f \in \overline{\mathrm{co}} S^1_F$,则存在 $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset \mathrm{co} S^1_F$,使 $\| f_n - f \|_1 \to 0$,所以有

$$x = \int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu \in \overline{\mathrm{co}} \int_{\Omega} F d\mu$$

即证(1) 成立.

(2) 依定理 2.2.4 知 $S^1_{F_1+F_2} = \mathrm{cl}(S^1_{F_1} + S^1_{F_2})$,从而易证(2) 成立.

定义 2.3.2 设 $(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ 为测度空间,称 $A \in \mathbf{A}$ 为 μ 的原子集,如果 $\mu(A) > 0$,且任给 $B \in \mathbf{A}, B \subset A$ 时,必有 $\mu(B) = 0$ 或 $\mu(A \backslash B) = 0$ 两者之一成立. 若 μ 不存在原子集,则称 μ 为非原子的.

定理 2.3.4 设 $F \in \mu[\Omega, X]$，$S_F^1 \neq \varnothing$，μ 非原子，则 $\mathrm{cl}\int_\Omega F d\mu$ 为凸集.

证明 设 $x_1, x_2 \in \mathrm{cl}\int_\Omega F d\mu$，则 $\varepsilon > 0$，存在 $f_1, f_2 \in S_F^1$ 使

$$\| x_i - \int_\Omega f_i d\mu \| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2)$$

考虑向量测度 $r: \mathbf{A} \to X \times X$

$$r(A) = (\int_A f_1 d\mu, \int_A f_2 d\mu)$$

因为 μ 是非原子的，所以 $\mathrm{cl}\{r(A), A \in \mathbf{A}\}$ 为 $X \times X$ 中凸集，而 $r(\varnothing) = (0,0)$ 故对于任给 $\lambda \in (0,1)$，存在 $A \in \mathbf{A}$，使

$$\| r(A) - \lambda r(\Omega) \| < \frac{\varepsilon}{4}$$

从而 $\| r(A^c) - (1 - \lambda) r(\Omega) \| < \frac{\varepsilon}{4}$，于是

$$\| \int_A f_i d\mu - \lambda \int_\Omega f_i d\mu \| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (i = 1, 2)$$

$$\| \int_{A^c} f_i d\mu - (1 - \lambda) \int_\Omega f_i d\mu \| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (i = 1, 2)$$

令 $f = \chi_A f_1 + \chi_{A^c} f_2$，则 $f \in S_F^1$，且

$$\begin{aligned}
& \| \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 - \int_\Omega f d\mu \| \\
\leqslant & \| \lambda x_1 - \lambda \int_\Omega f_1 d\mu \| + \| \lambda \int_\Omega f_1 d\mu - \int_A f_1 d\mu \| \\
+ & \| (1 - \lambda) x_2 - (1 - \lambda) \int_\Omega f_2 d\mu \| \\
+ & \| (1 - \lambda) \int_\Omega f_2 d\mu - \int_{A^c} f_2 d\mu \|
\end{aligned}$$

$$< \lambda \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + (1-\lambda)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

因此 $\mathrm{cl}\int_\Omega F d\mu$ 为凸集.

推论 2.3.1 若 $F \in \mu[\Omega, X]$, $S_F^1 \neq \varnothing$, μ 是非原子的, 则

$$\mathrm{cl}\int_\Omega F d\mu = \mathrm{cl}\int_\Omega \overline{\mathrm{co}} F d\mu \tag{2.3.2}$$

证明 由定理 2.3.3 及定理 2.3.4 易证.

定义 2.3.3 设 $K \subset X$, E 是 K 的子集. 若 $x, y \in K$, 且存在 $t \in (0,1)$ 使 $tx + (1-t)y \in E$ 时, 必有 $x, y \in E$, 则称 E 为 K 的端子集, 当 $E = \{x\}$ 为单点集时, 则称 x 为 K 的端点 (extreme point). 用 ext K 表示 K 的端点全体.

称 Banach 空间 X 具有 Krein-Milman 性质(KMP), 如果对于任给 $A \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$, 有

$$A = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\ A) \tag{2.3.3}$$

定理 2.3.5 我们假定设 X 具有 KMP, $F \in \mu_{bfc}[\Omega, X]$, $S_F^1 \neq \varnothing$, $S_{\mathrm{ext}F}^1 \neq \varnothing$, μ 是非原子的, 则有

$$\mathrm{cl}\int_\Omega F d\mu = \mathrm{cl}\int_\Omega \mathrm{ext} F d\mu \tag{2.3.4}$$

证明 由推论 2.3.1 知:

$$\mathrm{cl}\int_\Omega \mathrm{ext} F d\mu = \mathrm{cl}\int_\Omega \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}F) d\mu$$

而 X 具有 KMP, 则 $F = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}F)$ $(w \in \Omega)$, 定理得证.

定理 2.3.6 设 X 具 KMP, μ 非原子, $F \in \mu_{bfc}[\Omega, X]$, $S_F^1 \neq \varnothing$, $S_{\mathrm{ext}F}^1 \neq \varnothing$, 则对于任给 $f \in S_F^1$ 及 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in S_{\mathrm{ext}F}^1$,

使得

$$\left\| \int_\Omega f d\mu - \int_\Omega g d\mu \right\| < \varepsilon$$

证明　由定理 2.3.5 知：

$$\int_\Omega f d\mu \in \mathrm{cl} \int_\Omega F d\mu = \mathrm{cl} \int_\Omega \mathrm{ext} F d\mu$$

即可证明.

定理 2.3.7　设 $F \in \mu[\Omega, X]$，$\varphi(w,x): \Omega \times X \to \overline{R}$ 对每个固定的 $w \in \Omega$ 是 $x \in X$ 的连续函数，对每个固定的 $x \in X$ 是 $w \in \Omega$ 的可测函数，则

$$\xi_1(w) = \inf\{\varphi(w,x), x \in F(w)\}$$

$$\xi_2(w) = \sup\{\varphi(w,x), x \in F(w)\}$$

均为可测函数. 再进一步，若存在 $f_0(w) \in S_F^1$，使 $\int_\Omega \varphi(w, f_0(w)) d\mu < \infty$，则有

$$\inf_{f \in S_F^1} \int_\Omega \varphi(w, f(w)) d\mu = \int_\Omega \inf_{x \in F(w)} \varphi(w,x) d\mu \quad (2.3.5)$$

$$\sup_{f \in S_F^1} \int_\Omega \varphi(w, f(w)) d\mu = \int_\Omega \sup_{x \in F(w)} \varphi(w,x) d\mu \quad (2.3.6)$$

证明　由于 $F \in \mu[\Omega, X]$，故存在 X 值可测函数列 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 使得 $F(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geqslant 1\}$. 依定理条件可得

$$\xi_1(w) = \inf_{n \geqslant 1} \varphi(w, f_n(w))$$

$$\xi_2(w) = \sup_{n \geqslant 1} \varphi(w, f_n(w))$$

所以 ξ_1, ξ_2 均可测.

由于 $\xi_1(w) \leqslant \varphi(w, f_0(w))$，故 $\int_\Omega \xi_1 d\mu$ 存在且有限. 又因

为 $\xi_1(w) \leqslant \varphi(w, f(w))$ (a. e.), $f \in S_F^1$, 所以有

$$\int_\Omega \xi_1(w) d\mu \leqslant \inf_{f \in S_F^1} \int_\Omega \varphi(w, f(w)) d\mu$$

下面证明对于任取 $\beta > \int_\Omega \xi_1 d\mu$, 存在 $f \in S_F^1$, 使 $\int_\Omega \varphi(w, f(w)) d\mu < \beta$. 取 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{A}, \mu(A_n) < \infty, A_n \uparrow \Omega$, 及 $\rho(w) > 0$, $\int_\Omega \rho(w) d\mu < \infty$, 任给 $n \geqslant 1$, 定义

$$B_n = A_n \cap \{w, \varphi(w, f_0(w)) \geqslant -n\}$$

及

$$\xi_n(w) = \begin{cases} \xi_1(w) + \dfrac{\rho(w)}{n}, & w \in B_n \text{ 且 } \rho(w) \geqslant -n \\ -n + \dfrac{\rho(w)}{n}, & w \in B_n \text{ 且 } \rho(w) < -n \\ \varphi(w, f_0(w)) + \dfrac{\rho(w)}{n}, & w \notin B_n \end{cases}$$

易证 $\{\xi_n\} \subset L^1, \xi_n(w) \downarrow \xi_1(w)$ (a. e.) 所以存在 n_0, 使 $\int_\Omega \xi_{n0} d\mu < \beta$. 令 $\xi(w) = \xi_{n0}(w)$, 则 $\int_\Omega \xi(w) d\mu < \beta$ 且 $\xi_1(w) < \xi(w)$ (a. e.).

因为 $F(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), n \geqslant 1\}$, 而 $\inf_{n \geqslant 1} \varphi(w, f_n(w)) = \xi_1(w) < \xi(w)$ (a. e.), 显然存在可测函数 $g(w)$, 使 $g(w) \in F(w)$ 且 $\varphi(w, g(w)) \leqslant \xi(w)$ (a. e.). 进一步, 我们定义:

$$C_n = A_n \cap \{w, \| g(w) \| \leqslant n\}$$

及

$$f_n = \chi_{C_n} g(w) + x_{C_n^c} f_0(w), n \geqslant 1$$

则$\{f_n, n \geqslant 1\} \subset S_F^1$，且

$$\int_\Omega \varphi(w, f_n(w)) d\mu$$

$$= \int_{C_n} \varphi(w, g(w)) d\mu + \int_{C_A} \varphi(w, f_0(w)) d\mu$$

$$\leqslant \int_\Omega \xi(w) d\mu + \int_{C_A} (\varphi(w, f_0(w)) - \xi(w)) d\mu$$

因为$\int_\Omega \xi(w) d\mu < \beta$，$C_n \uparrow \Omega$，故存在某一$n \geqslant 0$，使得$\int_\Omega f_n d\mu < \beta$.

综上所述，即有

$$\inf_{f \in S_F^1} \int_\Omega \varphi(w, f(w)) d\mu = \int_\Omega \inf_{x \in F(w)} \varphi(w, x) d\mu$$

同理可证关于上确界的等式也成立.

定理2.3.8 设$F \in \mu[\Omega, X]$，则F可积有界当且仅当S_F^1为$L^1[\Omega, X]$中非空有界闭集.

证明 由定理2.3.7知

$$\int_\Omega \| F(w) \| d\mu = \int_\Omega \sup_{x \in F(w)} \| x \| d\mu = \sup_{f \in S_F^1} \int_\Omega \| f \| d\mu$$

因而易证结论成立.

定理2.3.9 设$F \in \mu[\Omega, X]$，$S_F^1 \neq \varnothing$，则对$x^* \in X^*$，有

$$\sigma(x^*, \int_\Omega F d\mu) = \int_\Omega \sigma(x^*, F) d\mu \qquad (2.3.7)$$

证明 首先由推论2.1.1知$\sigma(x^*, F)$可测$(x^* \in X^*)$，依定理2.3.7，有

$$\int_\Omega \sigma(x^*,F)d\mu = \int_\Omega \sup_{x\in F(w)} < x^*,x > d\mu$$

$$= \sup_{f\in S_F^1}\int_\Omega < x^*,f(w) > d\mu$$

$$= \sup_{f\in S_F^1} < x^*, \int_\Omega f(w)du >$$

$$= \sigma(x^*, \int_\Omega Fd\mu)$$

定理2.3.10 设$F\in L_f^1[\Omega,X]$，$\{A_n,n\geqslant 1\}$为Ω的可数可测划分，则

$$\int_\Omega Fd\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} Fd\mu$$

$$= \{\sum_{n=1}^\infty x_n, x_n \in \int_{A_n} Fd\mu\}$$

证明 显然$\int_\Omega Fd\mu \subset \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} Fd\mu \subset \{\sum_{n=1}^\infty x_n, x_n\in\int_{A_n}Fd\mu\}$. 设$x_n \in \int_{A_n} Fd\mu(n\geqslant 1)$，则存在$\{f_n\}\subset S_F^1$，使$x_n = \int_{A_n} f_n d\mu(n\geqslant 1)$. 令$f(w) = \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n} f_n(w)$，则$f(w)\in F(w)$(a.e.)，且

$$\int_\Omega \| f(w)\| d\mu \leqslant \int_\Omega \| F(w)\| d\mu < \infty$$

所以$\sum_{n=1}^\infty x_n = \int_\Omega f(w)d\mu \in \int_\Omega Fd\mu$，即得

$$\{\sum_{n=1}^\infty x_n, x_n \in \int_{A_n} F_n d\mu\} \subset \int_\Omega Fd\mu$$

故结论成立，定理得证.

由于 $F_1, F_2 \in \mathbf{L}^1_f[\Omega, X]$ 时，$\delta(F_1, F_2) \leqslant \|F_1\| + \|F_2\|$ (a.e.)，故 $\int_\Omega \delta(F_1(w), F_2(w)) d\mu < \infty$. 记

$$\Delta(F_1, F_2) = \int_\Omega \delta(F_1, F_2) d\mu \qquad (2.3.8)$$

则易证 $\Delta(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathbf{L}^1_f[\Omega, X]$ 上的度量，即满足：

(1) $\Delta(F_1, F_2) \geqslant 0$，$\Delta(F_1, F_2) = 0$ 当且仅当 $F_1 = F_2$ (a.e.)；

(2) $\Delta(F_1, F_2) = \Delta(F_2, F_1)$；

(3) $\Delta(F_1, F_2) \leqslant \Delta(F_1, F_3) + \Delta(F_3, F_2)$.

定理 2.3.11 设 $F_1, F_2 \in \mathbf{L}^1_f[\Omega, X]$，则

$$\delta(\mathrm{cl}\int_\Omega F_1 d\mu, \mathrm{cl}\int_\Omega F_2 d\mu) \leqslant \Delta(F_1, F_2) \qquad (2.3.9)$$

证明 任给 $f_1 \in S^1_{F_1}$，依定理 2.3.7 有

$$\inf_{f_2 \in S^1_{F_2}} \left\| \int_\Omega f_1 d\mu - \int_\Omega f_2 d\mu \right\| \leqslant \inf_{f \in S^1_{F_2}} \int_\Omega \| f_1 - f_2 \| d\mu$$

$$= \int_\Omega \inf_{x \in F_2} \| f_1(w) - x \| d\mu = \int_\Omega d(f_1(w), F_2(w)) d\mu$$

$$\leqslant \Delta(F_1, F_2)$$

从而任给 $x \in \mathrm{cl}\int_\Omega F_1 d\mu$ 有

$$d(x, \mathrm{cl}\int_\Omega F_2 d\mu) \leqslant \Delta(F_1, F_2)$$

同理可证，任给 $y \in \mathrm{cl}\int_\Omega F_2 d\mu$，有

$$d(y, \mathrm{cl}\int_\Omega F_1 d\mu) \leqslant \Delta(F_1, F_2)$$

依 $\delta(\cdot,\cdot)$ 的定义知定理结论成立.

定理 2.3.12 设 $F_1, F_2 \in \mathbf{L}_f^1[\Omega, X]$，则

$$\delta(S_{F_1}^1, S_{F_2}^1) \leqslant \Delta(F_1, F_2) \qquad (2.3.10)$$

证明 由于

$$\delta(S_{F_1}^1, S_{F_2}^1) = \sup\{|d(g, S_{F_1}^1) - d(g, S_{F_2}^1)|, g \in L^1[\Omega, X]\}$$

而

$$\begin{aligned} d(g, S_{F_1}^1) &= \inf_{f \in S_{F_1}^1} \int_\Omega \| g(w) - f(w) \| d\mu \\ &= \int_\Omega \inf_{x \in F_1} \| g(w) - x \| d\mu \\ &= \int_\Omega d(g(w), F_1(w)) d\mu \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} \delta(S_{F_1}^1, S_{F_2}^1) &= \sup_{g \in L^1[\Omega, X]} \Big| \int_\Omega d(g(w), F_1(w)) d\mu \\ &\quad - \int_\Omega d(g(w), F_2(w)) d\mu \Big| \\ &\leqslant \sup_{g \in L^1[\Omega, X]} \int_\Omega |d(g(w), F_1(w)) \\ &\quad - d(g(w), F_2(w))| d\mu \\ &= \int_\Omega \sup_{x \in X} |d(x, F_1(w)) - d(x, F_2(w))| d\mu \\ &= \int_\Omega \delta(F_1, F_2) d\mu = \Delta(F_1, F_2) \end{aligned}$$

定理 2.3.13 设 $F_1, F_2 \in \mathbf{L}_f^1[\Omega, X]$，则

$$\delta(\mathrm{cl}\int_\Omega F_1 d\mu, \mathrm{cl}\int_\Omega F_2 d\mu) \leqslant \delta(S^1_{F_1}, S^1_{F_2})$$

证明　由 $\delta(\cdot,\cdot)$ 的定义及不等式

$$\| \int_\Omega f_1 d\mu - \int_\Omega f_2 d\mu \| \leqslant \int_\Omega \| f_1 - f_2 \| d\mu \tag{2.3.11}$$

即证.

一般来说，对于可积有界集值随机变量，定理 2.3.12 中可取到完全的小于号，即

$$\delta(S^1_{F_1}, S^1_{F_2}) < \Delta(F_1, F_2).$$

例 2.3.1　设 $X = R$，$(\Omega, \mathbf{A}, \mu) = ([0,1], \mathbf{B}[0,1], \mu_l)$，$\mu_l$ 为 $[0,1]$ 上 Lebesgе 测度，令

$$F_1(x) = [1, \frac{1}{2}x + 1]$$

$$F_2(x) = [\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}]$$

则经过简单计算易得

$$\delta(F_1(x), F_2(x)) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Delta(F_1, F_2) = \int_0^1 \delta(F_1(x), F_2(x)) d\mu_l = \frac{7}{8}$$

$$\delta(S^1_{F_1}, S^1_{F_2}) = \int_0^1 |(\frac{1}{2}x + 1) - \frac{1}{2}| d\mu_l = \frac{3}{4}$$

定理 2.3.14　设 $F_1, F_2 \in \mathbf{L}^1_f[\Omega, X]$，令

$$A=\{w,\ \sup_{x\in F_1(w)} d(x,F_2(w))\geqslant \sup_{x\in F_2(w)} d(x,F_1(w))\}$$

则

$$\Delta(F_1,F_2)=\delta(S^1_{F_1/A},S^1_{F_2/A})+\delta(S^1_{F_1/A^c},S^1_{F_2/A^c})$$

当 $\mu(A)=0$ 或 $\mu(A^c)=0$ 时，$\Delta(F_1,F_2)=\delta(S^1_{F_1},S^1_{F_2})$.

证明 由 $\Delta(F_1,F_2)=\int_\Omega \delta(F_1,F_2)d\mu$

$$=\int_A \delta(F_1,F_2)d\mu$$

$$+\int_{A^c}\delta(F_1,F_2)d\mu$$

$$=\delta(S^1_{F_1/A},S^1_{F_2/A})$$

$$+\delta(S^1_{F_1/A^c},S^1_{F_2/A^c})$$

即证第一个结论成立，第二个结论是显然的.

定理 2.3.15 $(\mathbf{L}^1_f[\Omega,X],\Delta)$ 为完备的度量空间. $\mathbf{L}^1_k[\Omega,X]$，$\mathbf{L}^1_{kc}[\Omega,X]$ 为 $\mathbf{L}^1_f[\Omega,X]$ 的闭子集，因而也完备.

证明 仿照 X 值 Bochner 可积函数空间 $L^1[\Omega,X]$ 的完备性证明可证 $(\mathbf{L}^1_f[\Omega,X],\Delta)$ 是完备的，依定理 1.2.10，定理 1.2.11 易证后一结论成立.

仿照 X 值简单函数的定义(§2.1)，我们称具有如下形式的集值随机变量 F 为简单集值随机变量：

$$F(w)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(w)C_i$$

其中 $C_i\in\mathbf{P}_{fc}(X)$，$\{A_i,1\leqslant i\leqslant n\}\subset\mathbf{A}$ 为 Ω 的有限可测划分，显然简单集值随机变量 $F\in\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega,X]$，记

$$\mathbf{L}^1_s[\Omega,X]=\{F\in\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega,X]$$

存在简单集值随机变量列$\{F_n, n \geqslant 1\}$，使$\Delta(F_n, F) \to 0\}$

则

$$\mathbf{L}^1_{kc}[\Omega, X] \subset \mathbf{L}^1_s[\Omega, X] \subset \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega, X] \subset \mathbf{L}^1_f[\Omega, X]$$

由于$(\mathbf{P}_{kc}(X), \delta)$为可分的度量空间，故不难证明取紧凸值的简单集值随机变量全体稠密于$\mathbf{L}^1_{kc}[\Omega, X]$. 但下列的例子表示取闭凸值的简单集值随机变量全体并不一定稠密于$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega, X]$.

例 2.3.2 设$([0,1), \mathbf{B}, \mu)$为$[0,1)$上的 Lebesgue 测度空间，则任意$w \in [0,1]$可表示为$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \cdot 2^{-n}$，其中$w_n = 0$或1，定义$F: \Omega \to \mathbf{P}_{bfc}(l^2)$如下：

$$F(w) = \{x \in l^2, \|x\| \leqslant 1, < x, e_n > = 0 (n \geqslant 1)\}$$

其中$\{e_n, n \geqslant 1\}$为l^2的标准基. 首先我们证明若$w \neq w'$，则$\delta(F(w), F(w')) = 1$. 事实上，若$w \neq w'$，则存在某一$n \geqslant 1, w_n \neq w'_n$. 不妨设$w_n = 0, w'_n = 1$. 由于$e_n \in F(w')$且$\|e_n - x\|^2 = \|e_n\|^2 + \|x\|^2 \geqslant 1 (x \in F(w))$，而显然$\delta(F(w), F(w')) \leqslant 1$，故$\delta(F(w), F(w')) = 1$.

其次，任取$x = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots) \in l^2$. 由于

$$d(x, F(w)) = \lim_n d(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, F(w))$$

而$d(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, F(w))$在区间$[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}](k = 1, \cdots, 2^n)$上恒为常数，所以$d(x, F(w))$显然可测，从而$F(w) \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega, \mathbf{B}, \mu, l^2]$.

最后，我们说明 $F(w) \notin \mathbf{L}_s^1[\Omega,\mathbf{B},\mu,l^2]$. 假设不然，则 $F(w)$ 是几乎处处可分值的，即存在 $N \in \mathbf{B}, \mu(N)=0$ 及 $\{w^k\} \subset [0,1]$，使得 $\{F(w^k), k \geqslant 1\}$ 在度量 δ 意义下稠密于 $\{F(w), w \notin N\}$. 任取 $w \in N^c$ 使得 $w \neq w^k (k \geqslant 1)$，则我们知道 $k \geqslant 1$，

$$\delta(F(w), F(w^k)) = 1$$

这与 $\{F(w^k)\}$ 稠密于 $\{F(w), w \notin N\}$ 矛盾，因而

$$F \notin \mathbf{L}_s^1[\Omega, l^2]$$

定理 2.3.16 设 $F \in \mathbf{L}_s^1[\Omega, X]$, $f \in L^1[\Omega, X]$，则 $f \in S_F^1$，当且仅当 $\int_A f d\mu \in \mathrm{cl}\int_A F d\mu \ (A \in \mathbf{A})$. 若 X^* 可分，则上述结论对任意 $F \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega, X]$ 也成立.

证明 "必要性"显然.

"充分性"若 $F \in L_s^1[\Omega, X]$，则存在简单函数列 $\{F_n, n \geqslant 1\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(F_n, F) = 0$$

因而存在 $\{F_n\}$ 的子列（不妨仍记作 $\{F_n\}$），使得

$$(\delta) F_n(w) \to F(w) \quad (\text{a.e.})$$

所以存在 $N \in \mathbf{A}, \mu(N) = 0$，及 $\{C_i, i \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{bfc}(X)$，使得

$$\{F(w), w \notin N\} = \mathrm{cl}\{C_i, i \geqslant 1\}$$

其中右端闭包取 δ 拓扑意义. 由于 X 可分，对任意 $i \geqslant 1$，取 $\{y_{ij}, j \geqslant 1\}$ 为 C_i 的可数稠密子集，依凸集分离定理，存在 $y_{ij}^* \in X^*$，使

$$\langle y_{ij}^*, y_{ij} \rangle > \sigma(y_{ij}^*, C_i) \qquad (i, j \geqslant 1)$$

令$\{x_n^*, n \geqslant 1\} = \{y_{ij}^*, i, j \geqslant 1\}$，则任给$w \notin N$，$x \in F(w)$当且仅当

$$< x_n^*, x > \leqslant \sigma(x_n^*, F(w)) \qquad (n \geqslant 1) \quad (2.3.12)$$

假设$f \notin S_F^1$，则存在整数n及$A \in \mathbf{A}$，$\mu(A) > 0$，使

$$< x_n^*, f(w) > \sigma(x_n^*, F(w)) \quad (w \in A)$$

于是有

$$< x_n^*, \int_A f d\mu > = \int_A < x_n^*, f(w) > d\mu$$

$$> \int_A \sigma(x_n^*, F(w)) d\mu$$

$$= \sigma(x_n^*, \int_A F(w) d\mu)$$

从而$\int_A f d\mu \notin \mathrm{cl} \int_A F d\mu$，矛盾．所以$f \in S_F^1$.

若进一步X^*可分，取$\{x_n^*, n \geqslant 1\}$为X^*的可数稠密子集，则(2.3.12)式自然对任意$F \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega, X]$成立．

推论 2.3.2　设$F \in \mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega, X]$，$f \in L^1[\Omega, X]$，则$f \in S_F^1$当且仅当$\int_A f d\mu \in \mathrm{cl} \int_A F d\mu (A \in \mathbf{A})$.

证明　根据推论1.4.2，任给$w \in \Omega$，$x \in F(w)$当且仅当

$$< x_n^*, x > \leqslant \sigma(x_n^*, F(w)) (n \geqslant 1)$$

其中$\{x_n^*, n \geqslant 1\}$为X^*中Mackey拓扑意义下的稠密子集．其余的证明与定理2.3.16完全类似．

推论 2.3.3　设$F_1, F_2 \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega, X]$，若下列三条件之一满足：

(a) $F_1, F_2 \in \mathbf{L}_i^1[\Omega, X]$,

(b) X^* 可分,

(c) $F_1, F_2 \in \mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega, X]$,

则 $F_1(w) = F_2(w)$(a.e.) 当且仅当任给 $A \in \mathbf{A}$,有

$$\mathrm{cl}\int_A F_1 d\mu = \mathrm{cl}\int_A F_2 d\mu.$$

证明 综合定理 2.3.16,推论 2.3.2 及推论 2.2.1 易证.

定理 2.3.17 设 $j: \mathbf{P}_{kc}(X) \to \overline{\mathbf{D}}$ 为定理 1.2.14 所定义的嵌入映射,$F \in \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega, X]$,则

(1) $\widetilde{F}(w) = j(F(w)) \in L^1[\Omega, \overline{D}]$;

(2) $j(\mathrm{cl}\int_\Omega F d\mu) = (B)\int_\Omega \widetilde{F} d\mu.$

证明 (1) 由于 $F \in \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega, X]$,所以存在简单函数列 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega, X]$,使$\Delta(F_n, F) \to 0$,于是存在子列$\{F_{nk}, k \geqslant 1\}$ 使得

$$(\delta) F_{nk} \to F \quad \text{(a.e.)}$$

所以

$$\| j(F_{nk}(w)) - \widetilde{F}(w) \| = \delta(F_{nk}(w), \widetilde{F}(w)) \to 0 \quad \text{(a.e.)}$$

而由于$\{F_{nk}(w), k \geqslant 1\}$ 为 $\overline{D}$ 中简单函数列,故 $\widetilde{F}(w): \Omega \to \overline{\mathbf{D}}$ 是强可测的. 因为 $\int_\Omega \| \widetilde{F} \| d\mu = \int_\Omega \delta(F(w), \{0\}) d\mu < \infty$,故 $\widetilde{F} \in L^1[\Omega, \overline{\mathbf{D}}]$.

(2) 由于 $\mathbf{D}_0$ 是 $\overline{\mathbf{D}}$ 的闭凸锥,而$\{\widetilde{F}(w), w \in \Omega\} \subset \mathbf{D}_0$,所以

$(B)-\int_\Omega \widetilde{F}d\mu \in \mathbf{D}_0$.

当 F 为简单函数时，易证 $j(\int_\Omega Fd\mu)=(B)\int_\Omega \widetilde{F}d\mu$. 对于一般情形；设 $\{F_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_{kc}[\Omega,X]$ 为简单函数列，且 $\Delta(F_n,F)\to 0$，则有

$$\delta(\mathrm{cl}\int_\Omega F_n d\mu,\mathrm{cl}\int_\Omega Fd\mu)\to 0$$

另一方面，由 $j:\mathbf{P}_{kc}(X)\to \overline{\mathbf{D}}$ 的性质有

$$\|(B)\int_\Omega \widetilde{F}_n d\mu-(B)\int_\Omega \widetilde{F}d\mu\|$$

$$\leqslant \int_\Omega \|\widetilde{F}_n-\widetilde{F}\|d\mu=\int_\Omega \delta(F_n,F)d\mu=\Delta(F_n,F)\to 0$$

而由于任给 $n\geqslant 1$，$j(\int_\Omega F_n d\mu)=(B)\int_\Omega \widetilde{F}_n d\mu$，所以知

$$j(\int_\Omega Fd\mu)=(B)\int_\Omega \widetilde{F}d\mu$$

§2.4　集值随机变量的条件期望

从本节开始，在本书中，除非特别说明，我们恒假定$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$为完备的有限测度空间，X 为一可分的Banach 空间．首先给出 X 值 Bochner 可积函数条件期望的定义与基本性质．

设 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{A}$ 的子 σ- 代数，$f\in L^1[\Omega,\mathbf{A},\mu;X]$. 如果存在 X 值可测函数 $g\in L^1[\Omega;\mathbf{F},\mu;X]$ 使得 $A\in \mathbf{F}$,

$$\int_A fd\mu=\int_A gd\mu$$

则称 g 为 f 关于 $\mathbf{F}$ 的条件期望，记作 $E[f/\mathbf{F}]=g$. 可以证明

(胡迪鹤[20]，定理 2.5) 对于任意 $f \in L^1[\Omega,\mathbf{A},\mu;X]$，$E[f/\mathbf{F}]$ 存在且唯一.

X 值可测函数的条件期望具有以下性质：

(1) $x \in X, E[x/\mathbf{F}] = x$；

(2) 若 X 为 Banach 格，$f_1, f_2 \in L^1[\Omega,\mathbf{A},\mu;X]$，$f_1 \geqslant f_2$ (a.e.)，则

$$E[f_1/\mathbf{F}] \geqslant E[f_2/\mathbf{F}] \quad \text{(a.e.)};$$

(3) $f \in L^1[\Omega,X]$，$\| E[f/\mathbf{F}] \| \leqslant E[\| f \| /\mathbf{F}]$ (a.e.)；

(4) $c_i \in R(1 \leqslant i \leqslant n)$

及 $\{f_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset L^1[\Omega,\mathbf{A},\mu;X]$

$$E[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i/\mathbf{F}] = \sum_{i=1}^{n} c_i E[f_i/\mathbf{F}];$$

(5) 设 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ 为 σ- 代数，$\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}_2 \subset \mathbf{F}_3 \subset \mathbf{A}$，$f \in L^1[\Omega, \mathbf{A}, \mu, X]$ 且 $E[f/\mathbf{F}_3]$ 关于 $\mathbf{F}_1$ 可测，则

$$E[f/\mathbf{F}_1] = E[f/\mathbf{F}_2] = E[f/\mathbf{F}_3]$$

$$E[E[f/\mathbf{F}_2]/\mathbf{F}_1] = E[f/\mathbf{F}_1] = E[E[f/\mathbf{F}_1]/\mathbf{F}_2].$$

在给出集值随机变量条件期望定义之前，先引入一些记号. 设 $\mathbf{F}$ 为 $\mathbf{A}$ 的子 σ- 代数，$F \in \mu[\Omega,\mathbf{A},\mu;X]$，$S_F^1 \neq \varnothing$，记

$$S_F^1(\mathbf{F}) = \{f \in L^1[\Omega,\mathbf{A},\mu;X], f(w) \in F(w) \text{(a.e.)}\} \tag{2.4.1}$$

$$\int_\Omega^{(F)} F d\mu = \{\int_\Omega f d\mu, f \in S_F^1(\mathbf{F})\} \tag{2.4.2}$$

显然，$S_F^1(\mathbf{F}) \subset S_F^1$，$\int_\Omega^{(\mathbf{F})} F d\mu \subset \int_\Omega F d\mu$ 且 $S_F^1(\mathbf{A}) = S_F^1$，$\int_\Omega^{(\mathbf{A})} F d\mu = \int_\Omega F d\mu$.

定理 2.4.1 设 $F \in \mu[\Omega, X]$，$S_F^1 \neq \varnothing$，则存在一个集值随机变量 $E[F/\mathbf{F}] \in \mu[\Omega, \mathbf{F}, \mu, X]$，使得

$$S_{E[F/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F}) = \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{F}], f \in S_F^1\} \qquad (2.4.3)$$

其中上式右端的闭包取 $L^1[\Omega, X]$ 范数拓扑意义.

证明 设 $M = \{E[f/\mathbf{F}], f \in S_F^1\}$，则 M 非空．因为 $A \in \mathbf{F}$，$f_1, f_2 \in S_F^1$，有

$$\chi_A E[f_1/\mathbf{F}] + \chi_{A^c} E[f_2/\mathbf{F}] = E[\chi_A f_1 + \chi_{A^c} f_2/\mathbf{F}] \in M$$

所以 M 关于 $\mathbf{F}$ 是可分解的，且易证 $\mathrm{cl}M$ 也是关于 $\mathbf{F}$ 可分解的，即 $\mathrm{cl}M$ 为 $L^1[\Omega, \mathbf{F}, \mu; X]$ 中非空可分解闭集．依定理 2.2.9 及推论 2.2.1 即证存在唯一的 $E[F/\mathbf{F}] \in \mu[\Omega, \mathbf{F}, \mu; X]$，使得 $S_{E[F/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F}) = \mathrm{cl}M$.

定义 2.4.1 设 $F \in \mu[\Omega; X]$ $S_F^1 \neq \varnothing$，称由

$$S_{E[F/\mathbf{F}]}^1 = \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{F}], f \in S_F^1\}$$

所唯一确定的集值随机变量 $E[F/\mathbf{F}] \in \mu[\Omega; \mathbf{F}, \mu; X]$ 为 F 关于 $\mathbf{F}$ 的集值条件期望．

定理 2.4.2 若 $F \in L_f^1[\Omega, \mathbf{A}, \mu; X]$，则 $E[F/\mathbf{F}] \in \mathbf{L}_f^1[\Omega; \mathbf{A}, \mu; X]$.

证明 若 $F \in \mathbf{L}_f^1[\Omega, X]$，则 S_F^1 非空有界．由于任给 $f \in L^1[\Omega, X]$，$\| E[f/\mathbf{F}] \| \leqslant E[\| f \| /\mathbf{F}]$ 所以 $\mathrm{cl}M = \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{F}], f \in S_F^1\}$ 有界，即 $S_{E[F/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F})$ 为非空有界闭集，所以

$E[F/\mathbf{F}] \in \mathbf{L}_f^1[\Omega;\mathbf{F},\mu;X]$.

定理 2.4.3 若 $F \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega;X]$，则 $E[F/\mathbf{F}] \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega;\mathbf{F},\mu;X]$.

证明 因为 F 几乎处处凸，所以 S_F^1 为凸集，从而容易证明 $S_{E[F/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F})$ 也为凸集．依推论2.2.2 知 $E[F/\mathbf{F}] \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega,\mathbf{A},\mu,X]$.

例 2.4.1 设 $F \in \mu[\Omega;X]$，$\mathbf{F} = \{\varnothing,\Omega\}$，则依定义知

$$E[F/\mathbf{F}] = \frac{1}{\mu(\Omega)}\mathrm{cl}\int_\Omega F d\mu$$

定理 2.4.4 设 $F \in \mu[\Omega;X]$，$S_F^1 \neq \varnothing$，则任给 $x \in X$，有

$$E[d(x,F(w))/\mathbf{F}] \geqslant d(x,E[F/\mathbf{F}]) \quad (\text{a.e.}) \tag{2.4.4}$$

证明 首先由定理条件知，不等式两端均为 $\mathbf{F}$ 可测的可积实值随机变量．由于 $A \in \mathbf{F}$，有

$$\begin{aligned}
\int_A d(x,F(w))d\mu &= \int_A \inf_{y\in F(w)} d(x,y)d\mu \\
&= \inf_{f\in S_F^1}\int_A \| x - f(w) \| d\mu \\
&= \inf_{f\in S_F^1}\int_A E[\| x - f(w) \| /\mathbf{F}]d\mu \\
&\geqslant \inf_{f\in S_F^1}\int_A \| x - E[f/\mathbf{F}] \| d\mu \\
&= \int_A \inf_{y\in E[F/\mathbf{F}]} d(x,y)d\mu
\end{aligned}$$

$$= \int_A d(x, E[F/\mathbf{F}]) d\mu$$

所以 $E[d(x,F)/\mathbf{F}] \geqslant d(x, E[F/\mathbf{F}])$　(a.e.)

定理 2.4.5　设 $F_1, F_2 \in \mathbf{L}_f^1[\Omega; X]$，则

$$\delta(E[F_1/\mathbf{F}], E[F_2/\mathbf{F}]) \leqslant E[\delta(F_1, F_2)/\mathbf{F}] \quad \text{(a.e.)}$$

证明　设 $G_1 = E[F_1/\mathbf{F}], G_2 = E[F_2/\mathbf{F}]$，则 $\forall A \in \mathbf{F}$，有

$$\begin{aligned}
\int_A \sup_{x \in G_1} d(x, G_2) d\mu &\leqslant \int \sup_{x \in G_1} E[d(x, F_2)/\mathbf{F}] d\mu \\
&= \sup_{f \in S_{G_1}^1} \int_A E[d(f(w), F_2)/\mathbf{F}] d\mu \\
&= \sup_{f \in S_{G_1}^1} \int_A d(f(w), F_2) d\mu \\
&= \sup_{f \in S_{F_1}^1} \int_A d(E[f/\mathbf{F}], F_2) d\mu \\
&= \int_A \sup_{x \in F_1} d(x, F_2) d\mu
\end{aligned}$$

同理可证

$$\int_A \sup_{y \in G_2} d(y, G_1) d\mu \leqslant \int_A \sup_{y \in F_2} d(y, F_1) d\mu$$

用定理 2.3.14 同样的方法即证任给 $A \in \mathbf{F}$，有

$$\begin{aligned}
\int_A \delta(G_1, G_2) d\mu &\leqslant \int_A \delta(F_1, F_2) d\mu \\
&= \int_A E[\delta(F_1, F_2)/\mathbf{F}] d\mu
\end{aligned}$$

所以

$$\delta(E[F_1/\mathbf{F}],E(F_2/\mathbf{F}))\leqslant E[\delta(F_1,F_2)/\mathbf{F}]\quad(\text{a.e.})$$

推论 2.4.1 若 $F\in\mu[\Omega;X]$，$S_F^1\neq\varnothing$，则任给 $x\in X$，有

$$h(x,E[F/\mathbf{F}])\leqslant E[h(x,F)/\mathbf{F}]\quad(\text{a.e.})\qquad(2.4.5)$$

特别地，$\|E[F/\mathbf{F}]\|\leqslant E[\|F\|/\mathbf{F}]\quad(\text{a.e.})$

证明
$$\begin{aligned}h(x,E[F/\mathbf{F}])&=\delta(E[x/\mathbf{F}],E[F/\mathbf{F}])\\&\leqslant E(\delta(x,F)/\mathbf{F}]\\&=E[h(x,F)/\mathbf{F}]\quad(\text{a.e.})\end{aligned}$$

特别地取 $x=0$ 时，有

$$\begin{aligned}\|E[F/\mathbf{F}]\|&=h(0,E[F/\mathbf{F}])\\&\leqslant E[h(0,F)/\mathbf{F}]=E[\|F\|/\mathbf{F}]\quad(\text{a.e.})\end{aligned}$$

推论 2.4.2 若 $F_1,F_2\in L_f^1[\Omega,X]$ 则

$$\Delta(E[F_1/\mathbf{F}],E[F_2/\mathbf{F}])\leqslant\Delta(F_1,F_2)\qquad(2.4.6)$$

证明 对定理 2.4.5 中不等式两边关于 Ω 积分即得.

推论 2.4.3 设 $F\in L_f^1[\Omega,X]$，则任给 $A\in\mathbf{F}$，有

$$\int_A\|E[F/\mathbf{F}]\|d\mu\leqslant\int_A\|F\|d\mu\qquad(2.4.7)$$

证明 由推论 2.4.1 易证.

推论 2.4.4 若 $F\in L_f^1[\Omega,X]$，则

$$|E[F/\mathbf{F}]|\leqslant E[|F|/\mathbf{F}]\qquad(2.4.8)$$

其中 $|F|(w)=\inf\{\|x\|,x\in F(w)\}$.

证明 这是定理 2.4.4 取 $x=0$ 的特殊情形.

推论 2.4.5 设 $F_1,F_2\in L_f^1[\Omega,X]$，则

$$\delta(\text{cl}\int_\Omega F_1 d\mu, \text{cl}\int_\Omega F_2 d\mu) \leqslant \Delta(F_1, F_2) \qquad (2.4.9)$$

证明　取 $\mathbf{F} = \{\varnothing, \Omega\}$，则

$$E[F_i/\mathbf{F}] = \frac{1}{\mu(\Omega)}\text{cl}\int_\Omega F_i d\mu \quad (i = 1,2)$$

所以

$$\begin{aligned}
&\Delta(E[F_1/\mathbf{F}], E[F_2/\mathbf{F}]) \\
&= \int_\Omega \delta(E[F_1/\mathbf{F}], E[F_2/\mathbf{F}]) d\mu \\
&= \int_\Omega \delta(\mu(\Omega)^{-1}\text{cl}\int_\Omega F_1 d\mu, \mu(\Omega)^{-1}\text{cl}\int_\Omega F_2 d\mu) d\mu \\
&= \delta(\text{cl}\int_\Omega F_1 d\mu, \text{cl}\int_\Omega F_2 d\mu)
\end{aligned}$$

由推论 2.4.2 即可证明．

定理 2.4.6　设 $F_1, F_2 \in \mu[\Omega, X]$，$S_{F_1}^1, S_{F_2}^1 \neq \varnothing$，则

$$E[F_1 + F_2/\mathbf{F}] = E[F_1/\mathbf{F}] + E[F_2/\mathbf{F}]$$

证明　依集值条件期望的定义及定理 2.2.5，有

$$\begin{aligned}
S_{E[F_1+F_2/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F}) &= \text{cl}\{E[f/\mathbf{F}], f \in \text{cl}(S_{F_1}^1 + S_{F_2}^1)\} \\
&= \text{cl}\{E[f_1/\mathbf{F}] + E[f_2/\mathbf{F}], f_1 \in S_{F_1}^1, f_2 \in S_{F_2}^1\} \\
&= \text{cl}\{S_{E[F_1/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F}) + S_{E[F_2/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F})\} \\
&= S_{E[F_1/\mathbf{F}]+E[F_2/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F})
\end{aligned}$$

由推论 2.2.1 即可证明．

定理 2.4.7　设 $F \in \mathbf{L}_f^1[\Omega, X]$，$\xi(\omega): \Omega \to R$ 为 $\mathbf{F}$ 可测且一致有界，则

$$E[\xi \cdot F/\mathbf{F}] = \xi \cdot E[F/\mathbf{F}] \qquad (2.4.10)$$

证明 由于 $S^1_{\xi F} = \xi S^1_F$. 所以

$$S^1_{E[\xi F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) = \mathrm{cl}\{E[\xi f/\mathbf{F}], f \in S^1_F\}$$
$$= \mathrm{cl}\{\xi E[f/\mathbf{F}], f \in S^1_F\}$$

下面我们证明

$$\mathrm{cl}\{\xi E[f/\mathbf{F}], f \in S^1_F\} = \xi \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{F}], f \in S^1_F\} \qquad (2.4.11)$$

显然左边包含右边. 设 $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset S^1_F, f \in \mathbf{L}^1[\Omega, X]$, $\| \xi E[f_n/\mathbf{F}] - f \|_1 \to 0$, 那么就存在子序列(不妨仍记作 $\{f_n\}$), 使得

$$\| \xi E[f_n/\mathbf{F}](w) - f(w) \| \to 0 \quad (\mathrm{a.e})$$

令 $A = \{w, \xi(w) \neq 0\} \in \mathbf{F}$, 记

$$g_n = \chi_A f_n + \chi_{A^c} f_1 \quad (n \geqslant 1)$$
$$g = \chi_A \xi^{-1} f + \chi_{A^c} E[f_1/\mathbf{F}]$$

则 $\{g_n, n \geqslant 1\} \subset S^1_F$, 于是 $\| E[g_n/\mathbf{F}] \| \leqslant E[\| F \| /\mathbf{F}] (n \geqslant 1)$. 由于

$$\| E[g_n/\mathbf{F}] - g \| \to 0 \quad (\mathrm{a.e})$$

所以由 Lebesgue 控制收敛定理知 $\| E[g_n/\mathbf{F}] - g \|_1 \to 0$, 而显然有 $f = \xi g$, 故 $f = \xi g \in \xi \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{F}], f \in S^1_F\}$, 即右边包含左边. 所以(2.4.11) 成立, 即有

$$S^1_{E[\xi F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) = \xi S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) = S^1_{\xi E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

故 $E[\xi F/\mathbf{F}] = \xi E[F/\mathbf{F}]$.

定理 2.4.8 设 $F \in \mathbf{L}^1_f[\Omega, X]$, 则

$$E[\overline{\text{co}}F/\mathbf{F}] = \overline{\text{co}}E[F/\mathbf{F}] \qquad (2.4.12)$$

证明 由定理 2.2.8，有

$$\begin{aligned} S^1_{E[\overline{\text{co}}F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) &= \text{cl}\{E[f/\mathbf{F}], f \in S^1_{\overline{\text{co}}F} = \overline{\text{co}}S^1_F\} \\ &= \overline{\text{co}}\{E[f/\mathbf{F}], f \in S^1_F\} \\ &= \overline{\text{co}}S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) \\ &= S^1_{\overline{\text{co}}E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) \end{aligned}$$

所以 $E[\overline{\text{co}}F/\mathbf{F}] = \overline{\text{co}}E[F/\mathbf{F}]$.

定理 2.4.9 若 $F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega, \mathbf{F}, \mu; X]$，$\xi: \Omega \to R^+$ 一致有界且可测，则

$$E[\xi F/\mathbf{F}] = E[\xi/\mathbf{F}] \cdot F \quad (\text{a.e}) \qquad (2.4.13)$$

特别地 $E[F/\mathbf{F}] = F \quad (\text{a.e})$.

证明 依定理条件知 $E[\xi/\mathbf{F}]F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega, \mathbf{F}, \mu; X]$，仅需证明

$$S^1_{E[\xi/\mathbf{F}]\cdot F}(F) = \{E[f/\mathbf{F}], f \in S^1_{\xi F}\} \qquad (2.4.14)$$

依定理 2.2.3 知存在 $\{f_n, n \geq 1\} \subset S^1_F(\mathbf{F})$，使

$$F(w) = \text{cl}\{f_n(w), n \geq 1\} \qquad (\text{a.e})$$

设 $g \in S^1_{E[\xi/\mathbf{F}]F}(\mathbf{F})$，记

$$f(w) = \begin{cases} g(w)/E[\xi/\mathbf{F}](w), & E[\xi/\mathbf{F}](w) \neq 0 \\ f_1(w), & E[\xi/\mathbf{F}](w) = 0 \end{cases}$$

则 $f \in S^1_F(\mathbf{F})$，从而 $\xi f \in S^1_{\xi F}$ 且 $g = E[\xi/\mathbf{F}]f = E[\xi f/\mathbf{F}]$，于是知(2.4.14)式右边包含左边.

设 $g \in \{E[f/\mathbf{F}], f \in S^1_{\xi F}\}$，则存在 $f \in S^1_F$，使 $g = E[\xi f/\mathbf{F}]$. 由定理 2.2.4，$\varepsilon > 0$，存在 Ω 的 $\mathbf{A}$ 可测有限划分

$\{A_1, \cdots, A_n\}$，使

$$\| f - \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} f_i \|_1 < \varepsilon$$

因而

$$\| E[\xi f/\mathbf{F}] - E[\xi \cdot \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} f_i/\mathbf{F}] \|_1 \leqslant \| \xi \|_\infty \varepsilon$$

由于

$$E[\xi \cdot \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} f_i/\mathbf{F}]$$

$$= E[\xi/\mathbf{F}] \sum_{i=1}^{n} \frac{E[\chi_{A_i} \xi/\mathbf{F}]}{E[\xi/\mathbf{F}]} f_i \in S^1_{E[\xi/\mathbf{F}]F}(\mathbf{F})$$

所以

$$g = E[\xi f/\mathbf{F}] \in S^1_{E[\xi/\mathbf{F}]F}(\mathbf{F})$$

于是(2.4.14)式左边包含右边，(2.4.14)式成立，定理得证.

例2.4.2　定理2.4.9中$\xi(w)$的非负性假设一般不能去掉，设$([0,1],\mathbf{B},\mu)$为$[0,1]$上的Lebesgue测度空间，$\mathbf{F} = \{\varnothing,[0,1]\}$，$F(w) = [-1,1] \subset R$，取

$$\xi(w) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant w < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leqslant w < 1 \end{cases}$$

则$E[\xi F/\mathbf{F}] = [-1,1]$，而$E[\xi/\mathbf{F}] \cdot F = \{0\}$.

定理2.4.10　设$\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{A}$，$F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega,\mathbf{F},\mu;X]$，则

$$S^1_{E[F/\mathbf{F}_1]}(\mathbf{F}_1) = \mathrm{cl}\{E[g/\mathbf{F}_1], g \in S^1_F(\mathbf{F})\} \quad (2.4.15)$$

证明　在定理2.4.9(2.4.14)中取$\xi(w) = 1$，则有

$$S_F^1(\mathbf{F}) = \{E[f/\mathbf{F}], f \in S_F^1\}$$

于是

$$\begin{aligned} S^1_{E[F/\mathbf{F}_1]}(\mathbf{F}_1) &= \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{F}_1], f \in S_F^1\} \\ &= \mathrm{cl}\{E[E[f/\mathbf{F}]/\mathbf{F}_1], f \in S_F^1\} \\ &= \mathrm{cl}\{E[g/\mathbf{F}_1], g \in S_F^1(\mathbf{F})\} \end{aligned}$$

例2.4.3 定理2.4.10中$F(w)$的凸性假设一般不能去掉．设$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$为非原子概率空间，$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} = \{\varnothing,\Omega\}$，$F(w) \equiv \{0,1\} \subset R$，则$S^1_{E[F/\mathbf{F}_1]}(\mathbf{F}_1) = \{f(w), f(w) \equiv a, a \in [0,1]\}$，而

$$\mathrm{cl}\{E[g/\mathbf{F}_1], g \in S_F^1(\mathbf{F})\} = \{f_1(w) \equiv 0, f_2(w) \equiv 1\}$$

定理2.4.11 设$F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，$\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{A}$，则

$$E[E[F/\mathbf{F}]/\mathbf{F}_1] = E[F/\mathbf{F}_1] \tag{2.4.16}$$

证明 令$G = E[F/\mathbf{F}]$，则

$$\begin{aligned} S^1_{E[G/\mathbf{F}_1]}(\mathbf{F}_1) &= \mathrm{cl}\{E[g/\mathbf{F}_1], g \in S_G^1(\mathbf{F})\} \\ &= \mathrm{cl}\{E[E[f/\mathbf{F}]/\mathbf{F}_1], f \in S_F^1\} \\ &= \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{F}_1], f \in S_F^1\} \\ &= S^1_{E[F/\mathbf{F}_1]}(\mathbf{F}_1) \end{aligned}$$

定理2.4.12 若$F \in \mathbf{L}_f^1[\Omega,X]$，则任给$A \in \mathbf{F}$，有

$$\mathrm{cl}\int_A^{(\mathbf{F})} E[F/\mathbf{F}]d\mu = \mathrm{cl}\int_A F d\mu \tag{2.4.17}$$

证明 设$g \in S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$，则存在$\{f_n, n \geqslant 1\} \subset S_F^1$，使得$\| g - E[f_n/\mathbf{F}] \|_1 \to 0$，所以

$$\int_A g d\mu = \lim_n \int_A E[f_n/\mathbf{F}]d\mu = \lim_n \int_A f_n d\mu \in \mathrm{cl}\int_A F d\mu$$

即 $\quad \mathrm{cl}\int_A^{(\mathbf{F})} E[F/\mathbf{F}]d\mu \subset \mathrm{cl}\int_A F d\mu.$

设 $f \in S_F^1$，则 $E[f/\mathbf{F}] \in S_{E[F/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F})$，因而有

$$\int_A f d\mu = \int_A E[f/\mathbf{F}]d\mu \in \mathrm{cl}\int_A^{(\mathbf{F})} E[F/\mathbf{F}]d\mu$$

所以 $\mathrm{cl}\int_A F d\mu \subset \mathrm{cl}\int_A^{(\mathbf{F})} E[F/\mathbf{F}]d\mu$. 定理得证.

定理 2.4.13 设 $F \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega; X]$，则

$$\mathrm{cl}\int_A E[F/\mathbf{F}]d\mu = \mathrm{cl}\int_A F d\mu \quad (A \in \mathbf{F}) \quad (2.4.18)$$

证明 在定理 2.4.9(2.4.14) 中用 $E[F/\mathbf{F}]$ 代替 F，取 $\xi(w) \equiv 1$，则有

$$S_{E[F/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F}) = \{E[f/\mathbf{F}], f \in S_{E[F/\mathbf{F}]}^1\}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_A^{(\mathbf{F})} E[F/\mathbf{F}]d\mu &= \{\int_A E[f/\mathbf{F}], f \in S_{E[F/\mathbf{F}]}^1\} \\ &= \{\int_A f d\mu, f \in S_{E[F/\mathbf{F}]}^1\} \\ &= \int_A E[F/\mathbf{F}]d\mu\end{aligned}$$

再由定理 2.4.12 即得

$$\mathrm{cl}\int_A E[F/\mathbf{F}]d\mu = \mathrm{cl}\int_A F d\mu$$

定理 2.4.14 若 $F \in \mathbf{L}_f^1[\Omega; X]$，则 $E[F/\mathbf{F}]$ 由下式唯一确定：

$$\mathrm{cl}\int_A E[F/\mathbf{F}]d\mu = \mathrm{cl}\int_A F d\mu \quad (A \in \mathbf{F}) \quad (2.4.19)$$

且 $E[F/\mathbf{F}] \in \mathbf{L}_s^1[\Omega, \mathbf{F}, \mu; X]$

证明　若 $F(w) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(w) C_i, C_i \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$　$(1 \leqslant i \leqslant n)$，则

$$E[F/\mathbf{F}] = \sum_{i=1}^{n} E(\chi_{A_i}/\mathbf{F}) C_i \in \mathbf{L}_s^1[\Omega, \mathbf{F}, \mu; X]$$

设 $\{F_n\} \subset \mathbf{L}_s^1[\Omega; X]$ 为简单函数列，$F \in \mathbf{L}_s^1[\Omega; X]$ 且

$$\Delta(F_n, F) \to 0$$

则由推论 2.4.2 知

$$\Delta(E[F_n/\mathbf{F}], E[F/\mathbf{F}]) \leqslant \Delta(F_n, F) \to 0$$

所以 $E[F/\mathbf{F}] \in \mathbf{L}_s^1[\Omega; \mathbf{F}, \mu; X]$.

假设存在 $G \in \mathbf{L}_s^1[\Omega; \mathbf{F}, \mu; X]$，使任给 $A \in \mathbf{A}$ 有

$$\mathrm{cl}\int_A G d\mu = \mathrm{cl}\int_A F d\mu$$

则由定理 2.4.13 可得，任给 $A \in \mathbf{A}$

$$\mathrm{cl}\int_A E[F/\mathbf{F}] d\mu = \mathrm{cl}\int_A G d\mu$$

所以依推论 2.3.3 知 $G(w) = E[F/\mathbf{F}](w)$ (a.e.)，唯一性得证.

定理 2.4.15　若 X^* 可分，$F \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega; X]$，则 $E[F/\mathbf{F}] \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega; \mathbf{F}, \mu; X]$ 由

$$\mathrm{cl}\int_A E[F/\mathbf{F}] d\mu = \mathrm{cl}\int_A F d\mu \qquad (2.4.20)$$

唯一确定.

证明　类似定理 2.4.14.

定理 2.4.16 若 X 为自反的，$F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，则任给 $A \in \mathbf{F}$，

$$\int_A^{(F)} E[F/\mathbf{F}]d\mu = \int_A E[F/\mathbf{F}]d\mu = \int_A Fd\mu \tag{2.4.21}$$

证明 由于 X 自反，而 $F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，所以欲证等式中的三个积分均为弱紧凸的，因而是闭的．由定理 2.4.12、2.4.13 可证明．

推论 2.4.6 若 X 自反，X^* 可分，$F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，则 $E[F/\mathbf{F}] \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;\mathbf{F},\mu;X]$ 由

$$\int_A E[F/\mathbf{F}]d\mu = \int_A Fd\mu \quad (A \in \mathbf{F}) \tag{2.4.22}$$

唯一确定．

定理 2.4.17 设 X^* 可分，$\{x_n^*, n \geqslant 1\}$ 为 X^* 的可数稠密子集，$F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，则

$$E[F/\mathbf{F}] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X, \langle x_n^*, x\rangle \leqslant E[\sigma(x_n^*, F)/\mathbf{F}]\} \quad (\text{a.e.})$$

证明 令 $\xi_n = \sigma(x_n^*, F)$，则 $\xi_n \in \mathbf{L}^1$，记

$$G(w) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X, \langle x_n^*, x\rangle \leqslant E[\xi_n/\mathbf{F}](w)\}$$

则 $\mathrm{Gr}G = \mathbf{F} \otimes \mathbf{B}(X)$，于是依定理 2.1.6，$G \in \mu[\Omega,\mathbf{F},\mu;X]$．下面证明

$$S^1_G(\mathbf{F}) = \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{F}], f \in S^1_F\}$$

若 $f \in S^1_F$，则任给 $n \geqslant 1$，有

$$< x_n^*, E[f/\mathbf{F}] > = E[< x_n^*, f > /\mathbf{F}]$$
$$\leqslant E[\xi_n/\mathbf{F}] \quad (\text{a. e.})$$

所以 $E[f/\mathbf{F}] \in S_G^1(\mathbf{F})$.

反之,若 $f \in S_G^1(\mathbf{F})$,依定理 2.3.7,对于任给 $n \geqslant 1$ 及 $A \in \mathbf{F}$,有

$$< x_n^*, \int_A f d\mu > = \int_A < x_n^*, f(w) > d\mu$$
$$\leqslant \int_A E[\xi_n/\mathbf{F}] d\mu$$
$$= \int_A \xi_n d\mu = \sup_{g \in S_F^1} \int_A < x_n^*, g > d\mu$$
$$= \sigma(x_n^*, \int_A F d\mu)$$

从而可得

$$\int_A f d\mu \in \text{cl} \int_A F d\mu = \text{cl} \int_A^{(\mathbf{F})} E[F/\mathbf{F}] d\mu$$

由定理 2.3.16 知 $f \in S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$.

综上所述 $S_G^1(\mathbf{F}) = \text{cl}\{E[f/\mathbf{F}], f \in S_F^1\}$,即

$$G(w) = E[F/\mathbf{F}](w) \quad (\text{a. e.})$$

[注] 若 X^* 不可分,对于 $F \in \mathbf{L}_k^1[\Omega, X]$,存在依赖于 F 的可数列 $\{x_n^*, n \geqslant 1\} \subset X^*$,使上述定理结论依然成立.

定理 2.4.18 设 $F \in \mathbf{L}_f^1[\Omega; X]$,则任给 $x^* \in X^*$ 有

$$E[\sigma(x^*, F)/\mathbf{F}] = \sigma(x^*, E[F/\mathbf{F}]) \quad (\text{a. e.}) \tag{2.4.23}$$

当 X^* 可分时,存在 $N \in \mathbf{A}$, $\mu(N) = 0$,使 $w \notin N$ 时,上面公式

对于任意 $x^* \in X^*$ 成立.

证明 由于任给 $A \in \mathbf{F}$ 有

$$\int_A E[\sigma(x^*,F)/\mathbf{F}]d\mu = \int_A \sigma(x^*,F)d\mu$$

$$= \sup_{f \in S_F^1} \int_A < x^*, f > d\mu$$

$$= \sup_{f \in S_F^1} < x^*, \int_A f d\mu >$$

$$= \sigma(x^*, \mathrm{cl}\int_A F d\mu)$$

而

$$\int_A \sigma(x^*, E[F/\mathbf{F}])d\mu = \int_A \sup_{x \in E[F/\mathbf{F}]} < x^*, x > d\mu$$

$$= \sup_{f \in S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})} \int_A < x^*, f > d\mu$$

$$= \sup_{f \in S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})} < x^*, \int_A f d\mu >$$

$$= \sup_{f \in S_F^1} < x^*, \int_A f d\mu >$$

$$= \sigma(x^*, \mathrm{cl}\int_A F d\mu)$$

所以 $A \in \mathbf{F}$ 有

$$\int_A \sigma(x^*, E[F/\mathbf{F}])d\mu = \int_A E[\sigma(x^*,F)/\mathbf{F}]d\mu$$

即 $\sigma(x^*, E[F/\mathbf{F}]) = E[\sigma(x^*,F)/\mathbf{F}]$ (a. e.).

若 X^* 可分,取 $\{x_n^*, n \geqslant 1\}$ 为 X^* 可数稠密子集,则 $n \geqslant$

1，存在 $N_n \in \mathbf{A}, \mu(N_n) = 0$，使 $w \notin N_n$ 时，有

$$\sigma(x_n^*, E[F/\mathbf{F}]) = E[\sigma(x_n^*, F)/\mathbf{F}]$$

令 $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$，则 $\mu(N) = 0$，且 $w \notin N$ 时，$n \geqslant 1$ 有

$$\sigma(x_n^*, E[F/\mathbf{F}]) = E[\sigma(x_n^*, F)/\mathbf{F}]$$

对于任给 $x^* \in X^*$，设 $\{x_k^*, k \geqslant 1\} \subset \{x_n^*, n \geqslant 1\}, x_k^* \to x^*$，则 $w \notin N$ 时，有

$$\begin{aligned}\sigma(x^*, E[F/\mathbf{F}]) &= \lim_{k\to\infty} \sigma(x_k^*, E[F/\mathbf{F}]) \\ &= \lim_{k\to\infty} E[\sigma(x_k^*, F)/\mathbf{F}] \\ &= E[\lim_{k\to\infty} \sigma(x_k^*, F)/F] \\ &= E[\sigma(x^*, F)/F]\end{aligned}$$

故结论成立.

§2.5 集值随机变量序列的收敛性

定义 2.5.1 设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega; X], F \in \mu[\Omega; X]$，考虑以下几种收敛性，其中(1)—(5) 中收敛前面的记号意义与 §1.5 相同：

(1) $(K.M) F_n \to F$ (a.e.)；

(2) $(K) F_n \to F$ (a.e.)；

(3) $(M) F_n \to F$ (a.e.)；

(4) $(\delta) F_n \to F$ (a.e.)；

(5) $(w) F_n \to F$ (a.e.)；

(6) $(\Delta)F_n \to F$ 即 $\Delta(F_n,F) \to 0$;

(7) $(L)F_n \to F$ 即 $\delta(S^1_{F_n},S^1_F) \to 0$.

其中(6)、(7) 中假定$\{F_n,F\} \subset \mathbf{L}^1_f[\Omega,X]$.

定理 2.5.1 若 $(K.M)F_n \to F$ (a.e.),则

$$(K)F_n \to F \text{ 且} (M)F_n \to F \quad (\text{a.e.})$$

定理 2.5.2 若$(\delta)F_n \to F$ (a.e.),那么就得到$(K.M)F_n \to F$ (a.e.)

定理 2.5.3 在R_n中,$F \in \mu_K[\Omega;X]$,则$(\delta)F_n \to F$ (a.e.) 当且仅当$(K)F_n \to F$ (a.e.).

定理 2.5.4 设X为Schur空间,$(K)F_n \to F$ (a.e.) 当且仅当$(K.M)F_n \to F$ (a.e.).

定理 2.5.5 若$(\Delta)F_n \to F$,则$(L)F_n \to F$.

证明 由定理2.3.12 知$\delta(S^1_{F_n},S^1_F) \leqslant \Delta(F_n,F)$,故定理得证.

定理 2.5.6 若$(\Delta)F_n \to F$,则$(\delta)\mathrm{cl}\int_\Omega F_n d\mu \to \mathrm{cl}\int_\Omega F d\mu$.

证明 由定理 2.3.13 知 $\delta(\mathrm{cl}\int_\Omega F_n d\mu,\mathrm{cl}\int_\Omega F d\mu) \leqslant \Delta(F_n,F)$,定理得证.

定理 2.5.7 若$(\delta)F_n \to F$(a.e.),则存在$N \in \mathbf{A}$,$\mu(N) = 0$,使$w \notin N$时

$$\sigma(x^*,F_n(w)) \to \sigma(x^*,F(w))$$

在$\{x^* \in X^*, \|X^*\| \leqslant 1\}$上一致成立.

证明 由$\delta(F_n,F) = \sup\limits_{\|x^*\| \leqslant 1} |\sigma(x^*,F_n) - \sigma(x^*,F)|$ 即

证.

定理 2.5.8 若$(\delta)F_n \to F$ (a.e.),则$x \in X$有

$$d(x,F_n) \to d(x,F) \quad \text{(a.e.)}$$

证明 由$\delta(F_n,F) = \sup\limits_{x\in X}|d(x,F_n) - d(x,F)|$即可证明.

定理 2.5.9 若$(\Delta)F_n \to F$,则$(\mu)\delta(F_n,F) \to 0$,即

$$\mu\{w,\delta(F_n,F) \geq \varepsilon\} \to 0$$

证明 显然.

在实值随机变量序列收敛性的研究中,一个很重要的结论是实值随机变量序列的上、下极限均是可测的,下面我们讨论集值随机变量序列的强(弱)上、下极限的可测性.

定理 2.5.10 假设$\{F_n,n \geq 1\} \subset \mu[\Omega;X]$,则$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup F_n$,$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\inf F_n$均为集值随机变量.

证明 依集列上极限的性质定理 1.5.11 知

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n(w) = \bigcap_{m\geq 1}\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n\geq m}F_n(w)\right)$$

故由定理 2.1.11 及定理 2.1.13 知$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup F_n$为集值随机变量.

依集列下极限的定义,我们有

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf F_n(w) = \{x \in X,\lim_{n\to\infty}d(x,F_n(w)) = 0\}$$

由于$d(x,F_n(w))$关于$x \in X$连续,$w \in \Omega$可测,故它是$\mathbf{A} \times \mathbf{B}(X)$可测的,因此

$$\mathrm{Gr}(s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf F_n) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}(X).$$

于是依定理 2.1.6 可知 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\inf F_n$ 为集值随机变量．

定理2.5.11 设$\{F_n, n\geqslant 1\}\subset\mu[\Omega;X]$，且存在$G:\Omega\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$，使得 $F_n(w)\subset G(w)(n\geqslant 1, w\in\Omega)$，则

$$w\text{-}\lim\sup F_n$$

为集值随机变量．

证明 任给$w\in\Omega$，由于$F_n(w)\subset G(w)$，而X上的弱拓扑限制在弱紧集$G(w)$上是可度量化的，故

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n(w)=\bigcap_{m\geqslant 1}\mathrm{cl}_w\Big(\bigcup_{n\geqslant m}F_n(w)\Big)$$

从而依定理 2.1.12 及定理 2.1.17 知 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup F_n$ 为集值随机变量．

定理 2.5.12 设$\{F_n, n\geqslant 1\}\subset\mu[\Omega;X]$，而且存在有$R:\Omega\to\mathbf{P}_{bwkc}(X)$，使得 $F_n(w)\subset R(w)(n\geqslant 1, w\in\Omega)$，则

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n$$

为集值随机变量．

证明 任给正整数 $p\geqslant 1$，令

$$F_n^p(w)=F_n(w)\cap\bar{S}(0,p)$$

则 F_n^p 为集值随机变量．由于任给 $n\geqslant 1, p\geqslant 1$ 及 $w\in\Omega$，有

$$F_n^p(w)\subset R(w)\cap\bar{S}(0,p)\in\mathbf{P}_{wkc}(X)$$

故依定理 2.5.11 知$w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup F_n^p$ 为集值随机变量．但由于定理 1.5.18 知

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n(w)=\bigcup_{p\geqslant 1}w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n^p$$

为集值随机变量．

定理 2.5.13 设 X^* 是可分的，$\{F_n, n \geq 1\} \subset \mu[\Omega; X]$，则 $w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n$ 为集值随机变量．

证明 由推论 1.5.2 知

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n(w) = \bigcup_{p\geq 1}\bigcap_{m\geq 1} \mathrm{cl}_w(\bigcup_{n\geq m}(F_n(w) \cap \overline{S}(0,p)))$$

令 $G_{mp} = \mathrm{cl}_w(\bigcup_{n\geq m}(F_n(w) \cap \overline{S}(0,p)))$，则类似于定理 2.1.11 的证明，对于任意弱开集 $V \subset X, G_{mp}^{-1}(V) \in \mathbf{A}$. 因此，$\mathrm{Gr}(G_{mp}) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}(X)$，故依定理 2.1.6 知 $\bigcap_{m\geq 1} G_{mp}$ 为集值随机变量．因此，$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n \doteq \bigcup_{p\geq 1}\bigcap_{m\geq 1} G_{mp}$ 为集值随机变量．

定理 2.5.14 设 $\{F_n, n \geq 1\} \subset \mu[\Omega; X]$，

$$F = s\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n, f: \Omega \to X$$

为 F 的可测选择，则存在 X 值可测函数列 $\{f_n, n \geq 1\}$，f_n 为 F 的可测选择，使得 $(s) f_n(w) \to f(w)$.

证明 任给 $n \geq 1$，令

$$L_n(w) = \{x \in F_n(w), \| x - f(w) \| \leq d(f(w),$$

$$F_n(w)) + \frac{1}{n}\}$$

显然 $L_n(w) \in \mathbf{P}_f(X)(w \in \Omega)$. 由于 $d(x, F_n(w))$ 关于 $x \in X$ 连续，关于 $w \in \Omega$ 可测，因而是 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}(X)$ 可测的，故 $d(f(w), F_n(w))$ 是可测的，因此二元函数

$$\varphi(w, x) = \| x - f(w) \| - d(f(w), F_n(w))$$

关于 $x \in X$ 连续，关于 $w \in \Omega$ 可测，从而是 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}(X)$ 可测的．于是

$$\mathrm{Gr}L_n \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}(X)$$

故 L_n 为集值随机变量. 依定理 2.1.9 知 L_n 存在可测选择 f_n, 即 $f_n(w) \in F_n(w)$ 且 $\| f_n(w) - f(w) \| \leqslant d(f(w), F_n) + \frac{1}{n}(n \geqslant 1, w \in \Omega)$. 但由于 $f(w) \in F(w) = s\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n(w)$, 故 $d(f(w), F_n(w)) \to 0$, 因此, $(s) f_n \to f$. 定理得证.

定理 2.5.15 如果我们假设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega; X]$, $F = s\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n$, $\{f_n^{(k)}, k \geqslant 1\}$ 为 F 的一个 Castaing 表示, 则存在 X 值可测函数列 $\{f^{(k)}, k \geqslant 1, n \geqslant 1\}$, 使得对于固定的 $n \geqslant 1$, $\{f_n^{(k)}, k \geqslant 1\}$ 为 F_n 的 Castaing 表示, 并且任给 $k \geqslant 1$, $f_n^{(k)}(w) \to f^{(k)}(w)$.

证明 任给 $k \geqslant 1$, 依定理 2.5.14, 存在 $\{g_n^{(k)}, n \geqslant 1\}$, $g_n^{(k)}$ 为 F_n 的可测选择, 使得 $(s) g_n^{(k)}(w) \to f^{(k)}(w)$. 对于任给 $n \geqslant 1$, 设 $\{h_n^{(k)}, k \geqslant 1\}$ 为 F_n 的一个 Castaing 表示, 定义

$$f_n^{(k)}(w) = \begin{cases} g_n^{(k)}(w), & \text{若 } k \leqslant n \\ h_n^{(k-n)}(w), & \text{若 } k > n \end{cases}$$

则易证对于任意固定的 $n \geqslant 1$, $\{f_n^{(k)}, k \geqslant 1\}$ 为 F_n 的 Castaing 表示, 并且任给 $k \geqslant 1$, $(s) f_n^{(k)}(w) \to f^{(k)}(w)$.

定义 2.5.2 称集值随机变量 F 是可数简单的, 如果存在 Ω 的可数可测划分 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 及 $\{C_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_f(X)$, 使得 $F(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} C_n$.

定理 2.5.16 设 $F \in \mu[\Omega; X]$, 则

(1) 存在可数简单集值随机变量列 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega,$

$X]$，且任给 $w \in \Omega$，$F_n(w)$ 为有限集，使得

$$(K.M)F_n(w) \to F(w).$$

(2)　存在可数简单集随机变量列 $\{G_n\} \subset \mu_{fc}[\Omega;X]$，使得 $(K.M)G_n(w) \to F(w)$.

证明　(1)　设 $\{F_k, k \geqslant 1\}$ 为 F 的 Castaing 表示，令

$$\overline{F_n}(w) = \{f_1(w), \cdots, f_n(w)\}$$

任给 $n \geqslant 1$，依 X 值可测函数的性质，存在取可数值 X 值可测函数 $\{g_n^1, \cdots, g_n^n\}$，使得任给 $1 \leqslant i \leqslant n$，有

$$\sup_{w \in \Omega} \| f_i(w) - g_n^i(w) \| < \frac{1}{n}$$

定义 $F_n(w) = \{g_n^1(w), \cdots, g_n^n(w)\}$，显然 F_n 为集值随机变量，且 $F_n(w)$ 为有限集．下面证明 $(K.M)F_n(w) \to F(w)$.

首先，由于 $\{\overline{F_n}(w), n \geqslant 1\}$ 为单调增的，故

$$s\text{-}\liminf_{n \to \infty} \overline{F_n}(w) = F(w)$$

由于任给 $n \geqslant 1$，$\overline{F_n}(w) \subset F(w)(w \in \Omega)$，而 $F(w)$ 为闭凸集，从而也是弱闭集，所以 $w\text{-}\limsup\limits_{n \to \infty} \overline{F_n}(w) \subset F(w)$. 于是

$$(K.M)\ \overline{F_n}(w) \to F(w)$$

任给 $x \in F(w)$，必存在 $y_n \in \overline{F_n}(w)$，使得 $(s)y_n \to x$. 依 $\overline{F_n}(w)$ 的定义，存在 $1 \leqslant i(n) \leqslant n$，使得 $y_n = f_{i(n)}(w)$. 设 $x_n = g_n^{i(n)}(w)$，则知 $(s)x_n \to x$，从而 $x \in s\text{-}\liminf\limits_{n \to \infty} F_n(w)$，故 $F(w) \subset s\text{-}\liminf\limits_{n \to \infty} F_n(w)$. 但依 $\{g_n^k, n \geqslant 1, k \geqslant 1\}$ 的取法，$\| f_{i(k)}(w) - g_{n_k}^{i(k)}(w) \| \neq \frac{1}{n_k}$，因此 $(w)f_{i(k)}(w) \to x$. 因此 $f_{i(k)}(w) \in$

$F(w)(k \geqslant 1)$，而 $F(w)$ 为闭凸集，从而也是弱闭的，故知 $x \in F(w)(k \geqslant 1)$，因此，$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n(w) \subset F(w)$. 综合所述，即得

$$(K.M)F_n(w) \to F(w)$$

(2) 令 $G_n(w) = \overline{\text{co}}F_n(w)$，其中 F_n 如(1)中所给，则 $G_n \in \mu_{fc}[\Omega;X]$，下面证明 $(K.M)G_n(w) \to F(w)$. 由于 $G_n(w) \supset F_n(w)$，而依(1)所证结论知

$$F(w) \subset s\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n(w) \subset s\text{-}\liminf_{n\to\infty} G_n(w).$$

另一方面，任给 $x \in \limsup_{n\to\infty} G_n(w)$，存在 $x_k \in G_{nk}(w)$，使得 $(w)x_k \to x$. 任给 $k \geqslant 1$，我们有 $x_k = \sum_{j=1}^{mnk} \lambda_j z_j$，其中

$$z_n \in F_{nk}(w), 0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1, \sum_{j=1}^{nk} \lambda_j = 1$$

因此存在 $f_j(w) \in \overline{F_{nk}}(w)$，$\| z_j - f_j(w) \| < \frac{1}{n_k}(1 \leqslant j \leqslant n_k)$，使得

$$x_k = \sum_{j=1}^{nk} \lambda_j (z_j - f_j(w)) + \sum_{j=1}^{nk} \lambda_j f_j(w) = \mu_k + w_k$$

由于 $(s)\mu_k \to 0$，故 $w_k = x_k - \mu_k$ 弱收敛到 x，但由于任给 $k \geqslant 1$，$w_k = \sum_{j=1}^{nk} \lambda_j f_j(w) \in F(w)$，所以 $x \in F(w)$，从而可以证明 $w\text{-}\limsup_{n\to\infty} G_n(w) \subset F(w)$. 综合所述即得 $(K.M)G_n(w) \to F(w)$.

定理 2.5.17 设 X 是自反的，$F:\Omega \to \mathbf{P}_{fc}(X)$ 为集值映射，则下列命题等价.

(1) F 为集值随机变量；

(2) 存在可数简单集值随机变量列：

$$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu_{fs}[\Omega, X]$$

使得$(K.M)F_n(w) \to F(w)$.

证明 "(1)⇒(2)" 此即定理 2.5.16(2).

"(2)⇒(1)" 由于F_n为集值随机变量，所以我们任意给定 $x \in X, d(x, F_n(w))$ 是可测的．因为$(K.M)F_n(w) \to F(w)$，故依定理 1.5.24 知任给 $w \in \Omega, \lim\limits_{n\to\infty} d(x, F_n(w)) = d(x, F(w))$，所以$d(x, F(w))$是可测的．因此，依定理 2.1.6 知 F 是集值随机变量．

作为本节的结束，我们给出有限维情形下集值随机变量列几乎处处 Kuratowski 收敛的等价条件，并由此导出集值随机变量列依测度收敛的一个合理的定义及基本性质．以下恒设 X 为有限维 Banach 空间．

定理 2.5.18 设$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega; X], F \in \mu[\Omega; X]$，则下列命题等价

(1) $(K)F_n \to F$(a.e.)；

(2) 任给$x \in X, \lim\limits_{n\to\infty} d(x, F_n(w)) = d(x, F(w))$ (a.e.)；

(3) 任给 $x \in X, \varepsilon > 0$ 及 $r > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{m\geqslant n} ((F_m \backslash \varepsilon F) \cup (F \backslash \varepsilon F_m))^{-1}(\bar{S}(x, r))\Big) = 0$$

其中 $\varepsilon F = F + \bar{S}(0, \varepsilon), \varepsilon F_m = F_m + \bar{S}(0, \varepsilon)$.

证明 由定理1.5.32，定理1.2.3 以及X 的可分性易证

(1) 与(2) 等价,下面证明(1) 与(3) 等价.

"(1)⇒(3)" 若$(K)F_n(w)\to F(w)$ a.e.,则依定理1.5.32知存在零测集$N\in\mathrm{A}$,使得$w\notin N$时,$(K)(F_n\setminus\varepsilon F)\cup(F\setminus\varepsilon F_n)\to\varnothing$. 任给$x\in X,\varepsilon>0,r>0$,令

$$W_n(\varepsilon,r,x)=\bigcup_{m\geq n}((F\setminus\varepsilon F_m)\cup(F_m\setminus\varepsilon F_n))^{-1}(\bar{S}(x,r))$$

则$W_n(\varepsilon,r,x)\in\mathrm{A}$,且$W_n(\varepsilon,r,x)\downarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}W_n(\varepsilon,r,x)$. 但依定理1.5.29存在$n_0\geq 1$,使得$n\geq n_0$时

$$((F_n\setminus\varepsilon F)\cup(F\setminus\varepsilon F_n))\cap\bar{S}(x,r)=\varnothing$$

故知$w\notin W_{n_0}(\varepsilon,r,x)$. 因此,$W_{n_0}(\varepsilon,r,x)\subset N$,从而

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}W_n(\varepsilon,r,x)\subset N$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\mu\{W_n(\varepsilon,r,x)\}=0$,(3) 成立.

"(3)⇒(1)" 设$D=\{x_i,i\geq 1\}$为X的可数稠密子集,令

$$N=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}W_n(\frac{1}{k},r,x_i)$$

由于(3) 成立,故

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}W_n(\frac{1}{k},r,x_i))=\lim_{n\to\infty}\mu(W_n(\frac{1}{k},r,x_i))=0$$

所以$\mu(N)=0$. 若$w\notin N$,则任给$k\geq 1,i\geq 1$,有

$$w\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}W_n(\frac{1}{k},r,x_i)$$

即存在$n_0\geq 1$,使得$m\geq n_0$时,有

$$((F\setminus\varepsilon F_m)\cup(F_m\setminus\varepsilon F))\cap\bar{S}(x_i,r)=\varnothing$$

故依 X 的可分性及定理 1.5.32 知 $(K)F_n(w)\to F(w)$. 因此

$$(K)F_n\to F\quad \text{a.e.}$$

定义 2.5.3 设 $\{F_n,n\geqslant 1\}\subset\mu[\Omega;X]$, $F\in\mu[\Omega;X]$, 记

$$\triangle_n(w)=[(F_n\backslash\epsilon F)\cup(F\backslash\epsilon F_n)]\qquad(2.5.1)$$

$$\triangle_n^{-1}(K)=\{w\in\Omega,\triangle_n(w)\cap K\neq\varnothing\}\qquad(2.5.2)$$

若对于任给有界闭集 $K\subset X$, 有

$$\mu(\triangle_n^{-1}(K))\to 0$$

则称 F_n 依测度收敛于 F, 记作 $(\mu)F_n\to F$.

定理 2.5.19 若 $(K)F_n\to F$ (a.e.), 则 $(\mu)F_n\to F$.

证明 由定理 2.5.18 中等价命题(3) 即证.

定理 2.5.20 若 $(\mu)F_n\to F$, 那么必然存在 $\{F_n,n\geqslant 1\}$ 的子列 $\{F_{n_k},k\geqslant 1\}$ 使得 $(K)F_{n_k}(w)\to F(w)$ (a.e.).

证明 设 $\epsilon_l\downarrow 0$, $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\epsilon_l<\infty$, 取 $K_l\in\mathbf{P}_{bf}(X)$, $K_l\uparrow X(l\geqslant 1)$. 由于 $(\mu)F_n\to F$, 则 $l\geqslant 1$, 存在 N_l, $l\geqslant N_l$ 时, $\mu\{\triangle_{n}^{-1}(K_l)\}<\epsilon_l$. 于是可取 $\{n_l,l\geqslant 1\}\subset\{n\}$, $n_l\uparrow$, 使得

$$\sum_{l=1}^{\infty}\mu(\triangle_{n_l}^{-1}(K_l))<\sum_{l=1}^{\infty}\epsilon_l<\infty$$

考虑 $\{F_{n_l},l\geqslant 1\}\subset\{F_n,n\geqslant 1\}$. 利用 Borel-contell 引理可得

$$\mu\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=k}^{\infty}\triangle_{n_l}^{-1}(K_l)\}=0$$

$\epsilon>0$, $K\in\mathbf{P}_{bf}(X)$, 由于存在 $h\geqslant 1$, 使 $l\geqslant h$ 时 $\epsilon_l<\epsilon$ 且 $K\subset$

K_l，从而

$$\triangle_{\omega nl}^{-1}(K) \subset \triangle_{\omega nl}^{-1}(K_l)$$

$$\bigcup_{l=k}^{\infty} \triangle_{\omega nl}^{-1}(K) \subset \bigcup_{l=k}^{\infty} \triangle_{\omega nl}^{-1}(K_l)$$

于是

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\mu\{\bigcup_{l=k}^{\infty} \triangle_{\omega nl}^{-1}(K)\}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\mu\{\bigcup_{l=k}^{\infty} \triangle_{\omega nl}^{-1}(K_l)\}$$

$$\leqslant \mu\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=k}^{\infty} \triangle_{\omega nl}^{-1}(K_l)\} = 0$$

则 $\mu(\bigcup_{l=k}^{\infty} \triangle_{\omega nl}^{-1}(K)) \to 0$，所以由定理 2.5.18 知

$$(K)F_{nl} \to F \quad (\text{a.e.})$$

§2.6 集值条件期望序列的收敛性

本节研究集值随机变量列的条件期望，积分以及条件期望的可积选择空间的 Fatou 引理及控制收敛定理，以下恒设 $\mathbf{F}$ 为 $\mathbf{A}$ 的子 σ 代数.

定理 2.6.1 设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega; X]$，$F_n \uparrow$ (a.e.)，$S_{F_1}^1 \neq \varnothing$，记

$$F(w) = \mathrm{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(w))$$

则 $F \in \mu[\Omega; X]$，且

$$E[F/\mathbf{F}] = \mathrm{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E[F_n/\mathbf{F}]) \qquad (\text{a.e.})$$

证明 令 $G(w)=\mathrm{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty}E[F_n/\mathbf{F}])$，则容易证明 $F\in\mu[\Omega;X]$，$G\in\mu[\Omega;\mathbf{F},\mu;X]$. 且显然有

$$S_{F_1}^l\subset S_{F_2}^l\subset\cdots\subset S_F^l$$

$$S_{E[F/F]}^l(\mathbf{F})\subset S_{E[F_2/F]}^l(\mathbf{F})\subset\cdots\subset S_G^l(\mathbf{F})$$

对于任意 $f\in S_F^1$，由于 $d(f(w),F_n(w))\downarrow 0$(a.e.)，而 $d(f,F_n(w))\in L^1$，因此

$$\inf_{g\in S_{F_n}^1}\|f-g\|_1=\int_\Omega d(f(w),F_n(w))d\mu\to 0$$

即 $f\in\mathrm{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_{F_n}^1)$，从而知

$$S_F^1=\mathrm{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_{F_n}^1)$$

同理可证

$$S_G^1(\mathbf{F})=\mathrm{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_{E[F_n/F]}^1(\mathbf{F}))$$

所以

$$S_E^1[F/\mathbf{F}](\mathbf{F})=\mathrm{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{E[f/\mathbf{F}],f\in S_{F_n}^1\})=S_G^1(\mathbf{F})$$

即 $G=E[F/\mathbf{F}]$ (a.e.).

定理 2.6.2 设 $\{F_n,n\geqslant 1\}\subset\mathbf{L}_{ubc}^1[\Omega;X]$，$F_n\downarrow$ (a.e.)，记

$$F(w)=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n(w)\neq\varnothing\qquad(w\in\Omega)$$

则

$$E[F/\mathbf{F}]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[F_n/\mathbf{F}]\quad\text{(a.e.)}$$

证明 我们令 $G(w)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[F_n/\mathbf{F}]$，那么显然 $F\in$

$\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$，$E[F_n/\mathbf{F}]\downarrow$ (a. e.)，且

$$S^1_F = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^1_{F_n}, S^1_G(\mathbf{F}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}).$$

对于任意 $f_0 \in S^1_G(\mathbf{F})$，由于 $f_0 \in S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})(n \geqslant 1)$，而 $F_n \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$，从而

$$S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) = \{E[f/\mathbf{F}], f \in S^1_{F_n}\}$$

所以 $n \geqslant 1$，存在 $f_n \in S^1_{F_n}$，使得

$$E[f_n/\mathbf{F}] = f_0 \qquad \text{(a. e.)}$$

由于 $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S^1_{F_n} \subset S^1_{F_1}$，而 $S^1_{F_1} \in \mathbf{P}_{wkc}(L^1[\Omega;X])$，故存在子列 $\{f_{ni}, i \geqslant 1\}$，使 $(w_L)f_{ni} \to f$（其中 w_L 表示在 $L^1[\Omega,X]$ 中的弱收敛）．由 $L^1[\Omega;X]$ 中弱收敛的意义知 $E[f/\mathbf{F}] = f_0$ (a. e.)．由于 $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S^1_{F_n} = S^1_F$，所以 $f_0 = E[f/\mathbf{F}] \in S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$，故证

$$S^1_G(\mathbf{F}) \subset S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

而显然可得

$$S^1_G(\mathbf{F}) \supset S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

所以知 $G = E[F/\mathbf{F}]$ (a. e.)．

定理 2.6.3 设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega;X]$，而且存在非负的 $\xi \in L^1$，使得任给 $n \geqslant 1$，$d(0,F_n(w)) \leqslant \xi(w)$(a. e.)，若

$$F(w) = s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf F_n(w), S^1_F \neq \varnothing$$

$$E[F/\mathbf{F}] \subset s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf E[F_n/\mathbf{F}] \quad \text{(a. e.)}$$

证明 任给 $f \in S^1_F$，类似于定理 2.5.14，记

$$G_n(w) = \{x \in F_n(w), \| f(w) - x \|$$

$$\leqslant d(f(w),F_n(w)) + \frac{1}{n}\}$$

则 $G_n \in \mu[\Omega;X]$，故存在 $f_n \in S^1_{G_n} \subset S^1_{F_n}$，使得

$$\| f(w) - f_n(w) \| \leqslant d(f(w),F_n(w)) + \frac{1}{n}\}$$

$$\| f(w) \| \leqslant \xi(w) + 1$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n(w) - f(w) \| = 0$ (a.e.)，依 X 值条件期望的控制收敛定理，有

$$d(E[f/\mathbf{F}],E[f_n/\mathbf{F}]) \leqslant \| E[f/\mathbf{F}] - E[f_n/\mathbf{F}] \|$$

$$\leqslant E[\| f_n - f \| /\mathbf{F}] \to 0 \qquad \text{(a.e.)}$$

故 $E[f/\mathbf{F}] \in s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \inf E[F_n/\mathbf{F}]$.

对于任给 $g \in S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$，存在 $\{f_i, i \geqslant 1\} \subset S^1_F$，使得

$$\| E[f_i/\mathbf{F}] - g \|_1 \to 0$$

从而可取其子列 $\{f_{i(k)}, k \geqslant 1\}$，使得

$$\| E[f_{i(k)}/\mathbf{F}] - g \| \to 0 \qquad \text{(a.e.)}$$

故 $g(w) \in s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \inf E[F_n/\mathbf{F}]$ (a.e.). 依定理 2.2.3 易证结论成立.

推论 2.6.1 设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega;X]$，$\{d(0,F_n(w)), n \geqslant 1\}$ 一致可积，$F(w) = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \inf F_n(w)$，$S^1_F \neq \varnothing$，则

$$\mathrm{cl}\int_\Omega F d\mu \subset s\text{-}\lim_{n\to\infty} \inf \mathrm{cl}\int_\Omega F_n d\mu$$

证明 完全类似于定理 2.6.3 的证明，只是此时应注意到积分意义下的控制收敛定理在一致可积条件下依然成立.

定理 2.6.4 设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}^1_f[\Omega;X]$，且存在 $G \in$

$\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$，使得 $F_n(w) \subset G(w)$ $(n \geqslant 1, w \in \Omega)$，则

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} E[F_n/\mathbf{F}]$$

$$\subset \overline{\mathrm{co}} E[w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n/\mathbf{F}] \text{(a. e.)}$$

证明 设 $\{x_i^*, i \geqslant 1\}$ 为 X^* 中在Mackey拓扑 $m(X^*, X)$ 意义下的稠密子集．由于 $F_n(w) \subset G(w)(n \geqslant 1, w \in \Omega)$，故

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n(w) \subset G(w)$$

从而任给 $i \geqslant 1$

$$\sigma(x_i^*, w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n(w)) \leqslant \sigma(x_i^*, G(w)) \in L^1$$

但依定理 2.4.18 知

$$\sigma(x_i^*, E[w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n/\mathbf{F}])$$

$$= E[\sigma(x_i^*, w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n)/\mathbf{F}]$$

$$\sigma(x_i^*, E[F_n)/\mathbf{F}]) = E[\sigma(x_i^*, F_n)/\mathbf{F}] \text{(a. e.)}.$$

故依实值条件期望的 Fatou 引理及定理 1.5.14(1) 可得

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma(x_i^*, E[F_n/\mathbf{F}])$$

$$\leqslant E[\limsup_{n\to\infty} \sigma(x_i^*, F_n)/\mathbf{F}] \text{(a. e.)}$$

$$\leqslant E[\sigma(x_i^*, w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n)/\mathbf{F}]$$

$$= \sigma(x_i^*, E[w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n)/\mathbf{F}]) \quad \text{(a. e.)}$$

因此，依定理1.4.9(2)知存在零测集 $N \in \mathbf{A}$，使得 $w \notin N$ 时，任给 $x^* \in X^*$，恒有

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma(x^*, E[F_n/\mathbf{F}])$$

$$\leqslant \sigma(x^*, E[w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n/\mathbf{F}])$$

故依定理 1.5.13 可得

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup E[F_n/\mathbf{F}] \subset \overline{\text{co}}E[w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n/\mathbf{F}](\text{a.e.})$$

定理得证.

推论 2.6.2 设$\{F_n, n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}_f^1[\Omega;X]$，且存在$G\in \mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega;X]$，使得$F_n(w)\subset G(w)(n\geqslant 1, w\in\Omega)$，则

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup \text{cl}\int_\Omega F_n d\mu \subset \text{cl}\int_\Omega w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n d\mu$$

证明 由测度论的知识可知存在Ω的可数可测划分$\{A_i, A, i\geqslant 1\}$使得A_n为Ω的原子集，A不含任何原子集(见引理 6.2.2). 依定理 2.3.4 及定理 2.6.4 知

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup \text{cl}\int_A F_n d\mu \subset \text{cl}\int_A w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n d\mu$$

因此，仅需证明

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup \text{cl}\int_B F_n d\mu \subset \text{cl}\int_B w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n d\mu$$

其中B$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$. 由于$A_i$为原子集，故存在$C_i\in \mathbf{P}_f(X)$及$C_{ni}\in \mathbf{P}_f(X)$，使得$w\in A_i$时，恒有$F_n(w)=C_{ni}$，$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n(w)=C_i$. 因为$\|F_n(w)\|\leqslant\|G(w)\|(n\geqslant 1)$，故$\{\|F_n\|, n\geqslant 1\}$一致可积，因此

$$\sup_n \delta(\text{cl}\sum_{i=m}^{\infty}\mu(A_i)\|C_{ni}\|)\to 0(m\to\infty)$$

故依定理 1.5.16 知$m\to\infty$时，有

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup \text{cl}\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)C_{ni}\xrightarrow{\delta} w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup \text{cl}\int_B F_n d\mu$$

但依 C_{ni}, C_i 的取法显然有

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup \mathrm{cl}\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)C_{ni}=\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)C_i,(m\geqslant 1)$$

任给 $x\in \lim\limits_{n\to\infty}\sup \mathrm{cl}\int_B F_n d\mu$，必存在 $x_m\in \sum\limits_{i=1}^{m}\mu(A_i)C_i$，使得 $(s)x_m\to x(m\to\infty)$. 由于 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup F_n(w)\subset G(w)$，故可以证明 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup F_n$ 是可积有界的，任取它的一个可积选择 f，记 $B_m=\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}A_i$，且

$$y_m=\int_{B_m}f d\mu$$

则 $(s)y_m\to 0$，且 $x_m+y_m\in\int_B w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup F_n d\mu$，从而

$$x\in \mathrm{cl}\int_B w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n d\mu$$

因此

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup \mathrm{cl}\int_B F_n d\mu\subset \mathrm{cl}\int_B w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n d\mu$$

定理得证.

推论 2.6.3 设 $\{F_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}_f^1[\Omega;X]$，且存在 $G\in \mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega;X]$，使得 $F_n(w)\subset G(w)(n\geqslant 1,w\in\Omega)$，$(K.M)F_n(w)\to F(w)$，则

$$(K.M)\mathrm{cl}\int_\Omega F_n d\mu\to \mathrm{cl}\int_\Omega F_n d\mu$$

证明 由推论 2.6.1 及推论 2.6.2 易证.

为了给出集值条件期望序列的控制收敛定理，我们需要

引入下面的概念．设$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$为测度空间，$\mathbf{F}$为$\mathbf{A}$的子σ-代数，称$A \in \mathbf{A}$为一个$\mathbf{F}$原子，如果任给$A' \in \mathbf{A}, A' \subset A$，存在$B \in \mathbf{F}$，使得

$$\begin{aligned}&\mu((A \cap B)\triangle A')\\&= \mu(((A \cap B)\backslash A') \cup (A'\backslash(A \cap B))) = 0\end{aligned}$$

参照定义 2.3.2，易证下列事实：

(1) 若$\mathbf{F} = \{\varnothing,\Omega\}$，则$A \in \mathbf{A}$是$\mathbf{F}$-原子当且仅当$A$是原子；

(2) 设$\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}_2$均为$\mathbf{A}$的子$\sigma$-代数，若$\mu$是无$\mathbf{F}_2$-原子的，则$\mu$必是无$\mathbf{F}_1$原子的．

而且还可以证明(Valadier[104])，若$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$无$\mathbf{F}$-原子，则对于任给$F \in \mu[\Omega;X], S_F^1 \neq \varnothing$，必有$E[\overline{\mathrm{co}}F/\mathbf{F}] = E[F/\mathbf{F}]$(a.e.).

定理 2.6.5 设$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_f^1[\Omega;X]$，且存在$G \in \mathbf{L}_{\mathrm{wkc}}^1[\Omega;X]$，是无$\mathbf{F}$-原子的或$F \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega;X]$，则

$$E[F_n/\mathbf{F}] \to E[F/\mathbf{F}] \text{ (a.e.)}$$

证明 利用定理2.6.3定理2.6.4及上述Valadier的结果易证．

定理2.6.6 设$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_f^1[\Omega;X]$，且存在非负的$\xi \in L^1$，使得

$$\| F_n(w) \| \leqslant \xi(w)\text{(a.e.)}, (\delta)F_n(w) \to F(w) \text{ (a.e.)}$$

则

$$(\delta)E[F_n/\mathbf{F}] \to E[F/\mathbf{F}] \text{ (a.e.)}$$

证明 由于任给 $n \geqslant 1, \delta(F_n(w), F(w)) \leqslant 2\xi(w)$ (a.e.)，且依定理 2.4.5 知

$$\delta(E[F_n/\mathbf{F}], E[F/\mathbf{F}]) \leqslant E[\delta(F_n, F)/\mathbf{F}]$$

依实值条件期望的控制收敛定理即得．

推论 2.6.4 设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega; X]$，$\{\| F_n(w) \|, n \geqslant 1\}$ 一致可积，$(\delta)F_n(w) \to F(w)$ (a.e.)，则

$$(\delta)\mathrm{cl}\int_\Omega F_n d\mu \to \mathrm{cl}\int_\Omega F_n d\mu$$

证明 完全类似于定理 2.6.6，只是此时应注意到积分意义下的控制收敛定理在一致可积条件下依然成立．

下面，我们研究集值条件期望条件可积选择空间的收敛性．

定理 2.6.7 设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega; X]$，且存在非负的 $\xi \in L^1$，使得

$$d(0, F_n(w)) \leqslant \xi(w) \quad (n \geqslant 1, w \in \Omega)$$

则有 $S^1_{s\text{-}\lim\inf E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) \subset s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\inf S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$

证明 不妨设 $S^1_{s\text{-}\lim\inf E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) \neq \varnothing$，任给

$$g \in S^1_{s\text{-}\lim\inf E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

类似于定理 2.6.3 知存在 $g_n \in S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$，使得

$$\begin{aligned}\| g_n(w) - g(w) \| &\leqslant d(g(w), E[F_n/\mathbf{F}]) + \frac{1}{n} \\ &\leqslant \| g(w) \| + d(0, E[F_n/\mathbf{F}]) + \frac{1}{n} \\ &\leqslant \| g(w) \| + E[d(0, F_n)/\mathbf{F}] + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\leqslant \| g(w) \| + E[\xi/F] + 1$$

故$\{\| g_n(w) - g(w) \|, n \geqslant 1\}$一致可积，而由于$g(w) \in s\text{-}\liminf_{n\to\infty} E[F_n/\mathbf{F}]$，故知$\lim_{n\to\infty} \| g_n - g \| = 0$ (a.e.)，从而有

$$\| g_n - g \|_1 \to 0$$

所以，$g \in s\text{-}\liminf_{n\to\infty} S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$，定理得证.

定理 2.6.8 设$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mu[\Omega; X]$，$d(0, F_n) \in L^1 (n \geqslant 1)$，则

$$s\text{-}\limsup_{n\to\infty} S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) \subset S^1_{s\text{-}\lim\sup E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

证明 不妨设$s\text{-}\limsup_{n\to\infty} S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) \neq \varnothing$. 任给

$$g \in s\text{-}\limsup_{n\to\infty} S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

则存在$f_k \in S^1_{E[F_{nk}/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$，使得$\| f_k - g \|_1 \to 0$. 任给$k \geqslant 1$，取$g_k \in S^1_{F_{nk}}$，使得$\| f_k - E[g_k/\mathbf{F}] \| \leqslant \frac{1}{k}$，从而知

$$\| E[g_k/\mathbf{F}] - g \|_1 \to 0$$

故$g \in L^1[\Omega; X]$且存在$\{g_k, k \geqslant 1\}$的子列（不妨仍记作$\{g_k, k \geqslant 1\}$），使得$(s)E[g_k/\mathbf{F}](w) \to g(w)$ (a.e.)，因此

$$g(w) \in s\text{-}\limsup_{n\to\infty} E[F_n/\mathbf{F}] \text{ (a.e.)}$$

即知$g \in S^1_{s\text{-}\lim\sup E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$，证毕.

定理 2.6.9 设$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}^1_f[\Omega; X]$，且存在$G \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$，使得$F_n(w) \subset G(w) (n \geqslant 1), w \in \Omega)$，则

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) \subset \overline{\text{co}} S^1_{E[w\text{-}\lim\sup/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

证明 任给$g \in w\text{-}\limsup_{n\to\infty} S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$，类似于定理 6.2.8，存在$g_k \in S^1_{F_{nk}}$，使得

$$(w_l)E[g_k/\mathbf{F}] \to g$$

因此

$$g(w) \in \overline{\text{co}}w\text{-}\limsup_{k\to\infty} E[g_k/\mathbf{F}]$$

$$\subset \overline{\text{co}}E[w\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n/\mathbf{F}] \text{ (a. e.)}$$

故依定理 2. 2. 8 知

$$g \in \overline{\text{co}}S^1_{E[w\text{-}\lim\sup F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

定理得证.

定理 2. 6. 10 设$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}^1_f[\Omega; X]$，且存在$G \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$ 使得 $F_n(w) \subset G(w)$ $(n \geqslant 1, w \in \Omega)$，$(K.M)F_n(w) \to F(w)$ (a. e.)，若$(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ 是无$\mathbf{F}$-原子的或$F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$，则

$$(K.M)S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) \to S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

证明 综合定理 2. 6. 7 及定理 2. 6. 9 即得.

定理 2. 6. 11 设$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_f[\Omega; X]$，且存在$G \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$，使得$F_n(w) \subset \mathbf{G}(w)$ $(n \geqslant 1, w \in \Omega)$，$(M)F_n(w) \to F(w)$. (a. e.)，若$(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ 是无$\mathbf{F}$-原子的或$\mathbf{F} \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$，则

$$(K.M)S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) \to S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

证明 综合定理 2. 6. 7、定理 2. 6. 9 即得.

定理 2. 6. 12 设$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_f[\Omega; X]$，$\{\|F_n\|, n \geqslant 1\}$ 一致可积，$(\delta)F_n(w) \to F(w)$ (a. e.)，则

$$(\delta)S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) \to S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

证明 由于$(\delta)F_n \to F$ (a.e.),$\{\|F_n\|, n \geq 1\}$一致可积,故

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \delta(F_n, F)d\mu = 0$$

依定理 2.3.12 及定理 2.4.5 知

$$\begin{aligned}
&\delta(S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}), S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})) \\
&\leqslant \triangle(E[F_n/\mathbf{F}], E[F/\mathbf{F}]) \\
&\leqslant \triangle(F_n, F) = \int_\Omega \delta(F_n, F)d\mu
\end{aligned}$$

故定理得证.

第三章　集值随机过程的一般理论

§3.1　集值随机过程的定义与性质

设$(\Omega,\mathbf{A},P)$为完备的概率空间，T为实数集R中的子集. X为可分的Banach空间，$\mu[\Omega,X]$为集值随机变量全体.

定义3.1.1　设$F_t\in\mu[\Omega,X](t\in T)$，即对于任意$t\in T$，$F_t$为集值随机变量，称$\{F_t,t\in T\}$，为集值随机过程. 若$\mathbf{F}_t\subset\mathbf{A}$是子$\sigma$代数$(t\in T)$，且$\mathbf{F}_t\uparrow$，$F_t$关于$\mathbf{F}_t$可测，称$\{(F_t,\mathbf{F}_t),t\in T\}$为适应的集值随机过程.

若$T=[a,b]\subset R$，称$\{F_t,t\in T\}$为连续参数的集值随机过程. 若$T=\{1,2,3,\cdots\}$，称$\{F_t,t\in T\}$为离散参数的集值随机过程，或集值随机变量序列.

定理3.1.1　$\{F_t,t\in T\}$是集值随机过程的充要条件为存在一列X值随机过程$\{F_t^{(n)},t\in T\}(n\geqslant 1)$，使

$$F_t(w)=\mathrm{cl}\{f_t^{(n)},(w),n\geqslant 1\},\quad (t\in T)\quad (3.1.1)$$

$\{(F_t,\mathbf{F}_t),t\in T\}$为适应的集值随机过程当且仅当存在一列$X$值适应的随机过程$\{(f_t^{(n)},\mathbf{F}_t),t\in T\}(n\geqslant 1)$，使(3.1.1)成立. 若$F_t$可积，则$f_t^{(n)}$可积.

证明　由定理2.1.8，任给$t\in T$，对于集值随机变量F_t，存在一列强可测选择$\{f_t^{(n)},n\geqslant 1)$，使(3.1.1)成立. 固定$n\geqslant$

1，则$\{f_t^{(n)},t\in T\}$为X值随机过程，且F_t为$\mathbf{F}_t$可测时，$f_t^{(n)}$关于$\mathbf{F}_t$可测$(n\geqslant 1)$．则证．

若$\forall\, t\in T,F_t$是可积的，称$\{F_t,t\in T\}$是可积集值随机过程．若$t\in T,F_t$可积有界，称$\{F_t,t\in T\}$是可积有界的集值随机过程．

定理3.1.2　设$\{F_t,t\in T\}$是集值随机过程，则

(a)　$|F_t(w)|=\inf\{\|x\|,x\in F_t(w)\}$，

(b)　$\|F_t(w)\|=\sup\{\|x\|,x\in F_t(w)\}$，

(c)　$d(x,F_t(w))=\inf\{\|x-y\|,y\in F_t(w)\}(x\in X)$，

(d)　$h(x,F_t(w))=\sup\{\|x-y\|,y\in F_t(w)\}(x\in X)$，

(e)　$\sigma(x^*,F_t(w))=\sup\{<x^*,x>,x\in F_t(w)\}(x^*\in X^*)$，

为实值随机过程，若$\{(F_t,\mathbf{F}_t),t\in T\}$是适应的集值随机过程，则以上过程也就是适应的实值随机过程，若$\{F_t,t\in T\}$是可积有界的集值随机过程，则以上过程均为可积有界的实值随机过程．

证明　由定理(3.1.1)，存在一列X值随机过程$\{f_t^{(n)},t\in T\}(n\geqslant 1)$，使(3.1.1)成立，从而

$$|F_t(w)|=\inf\{\|f_t^{(n)}(w)\|,n\geqslant 1\}$$

$$\|F_t(w)\|=\sup\{\|f_t^{(n)}(w)\|,n\geqslant 1\}$$

$$d(x,F_t(w))=\inf\{\|x-f_t^{(n)}(w)\|,n\geqslant 1\}$$

$$h(x,F_t(w)) = \sup\{\|x - f_t^{(n)}(w)\|, n \geqslant 1\}$$

$$\sigma(x^*, F_t(w)) = \sup\{< x^*, f_t^{(n)}(w) >, n \geqslant 1\}$$

且有

$$|F_t(w)| \leqq \|F_t(w)\|$$

$$d_f(x, F_t(w)) \leqq h(x, F_t(w)) \leqq \|x\| + \|F_t(w)\|$$

$$\sigma(x^*, F_t(w)) \leqq \|x\| \|F_t(w)\|$$

则证.

定理3.1.3 设$\{F_t, t \in T\}$及$\{F'_t, t \in T\}$为两个集值随机过程，则

(a) $\delta_u(F_t(w), F'_t(w)) = \sup\{d(y, F_t(w), y \in F'_t(w)\}$

(b) $\delta_l(F_t(w), F'_t(w)) = \sup\{d(x, F'_t(w)), x \in F_t(w)\}$

(c) $\delta(F_t(w), F'_t(w))$

$$= \max\{\delta_u(F_t(w), F'_t(w)), \delta_l(F_t(w), F'_t(w))\}$$

是实值随机过程，若$\{(F_t, \mathbf{F}_t), t \in T\}$及$\{(F'_t, \mathbf{F}_t), t \in T\}$是适应的集值随机过程，则以上过程为关于$\mathbf{F}_t$同样是适应的实值随机过程. 若$\{F_t, t \in T\}$及$\{F'_t, t \in T\}$为可积有界的集值随机过程，则以上过程为可积的实值随机过程.

证明 由X可分性及

$$\delta(F_t(w), F'_t(w)) \leqq \|F_t(w)\| + \|F'_t(w)\|$$

利用定理3.1.2则证.

由于$(\mathbf{P}_f(X), \delta)$为度量空间，可以生成$\mathbf{P}_f(X)$上的Borel σ代数，记作$\mathbf{B}(P_f(X))$. $\mathbf{P}_f(X)$上的由下拓扑$\mathbf{J}_l$生成的拓扑σ

代数记作$\sigma(\mathbf{J}_l)$. 由定理1.3.13知$I_*(G)$是$(\mathbf{P}_f(X),\delta)$中的开集,从而

$$\sigma(\mathbf{J}_l) \subset \mathbf{B}(\mathbf{P}_f(X)) \tag{3.1.2}$$

对于集值随机过变量$F \in \mu[\Omega,X]$,及$U \in \mathbf{B}(\mathbf{P}_f(X))$,记

$$F^{-1}(U) = \{w \in \Omega, F(w) \in U\}$$

$$\mathbf{A}_F = \sigma\{F^{-1}(I_*(G)), G \text{ 为 } X \text{ 中开集}\}$$

$$\mathbf{A}'_F = \sigma\{F^{-1}(U), U \in \mathbf{B}(\mathbf{P}_f(X))\}$$

显然有$\mathbf{A}_F \subset \mathbf{A}'_F$. $\mathbf{A}_F$是使F可测的最小σ代数.

定义 3.1.2 设$\{F_t, t \in T\}$为集值随机过程,若$\mathbf{A}_{F_t}(t \in T)$为独立事件族,称$\{F_t, t \in T\}$为独立的集值随机过程.

定义 3.1.4 $\{F_t, t \in T\}$为独立集值随机过程的充分必要条件为,对于任意$n \geqslant 2, t_i \in T(i \leqq n)$及$X$中任意开集$G_i(i \leqq n)$,有

$$P\{w, F_{t_i}(w) \cap G_i \neq \varnothing (i \leqq n)\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{w, F_{t_i}(w) \cap G_i \neq \varnothing\} \tag{3.1.3}$$

同时也等价于,对于任意$n \geqq 2, t_i \in T(i \leqq n)$及$X$中闭集$C_i(i \leqq n)$有

$$P\{w, F_{t_i}(w) \subset C_i (i \leqq n)\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{w, F_{t_i}(w) \subset C_i\}$$

证明 由于

$$P\{w, F_{t_i}(w) \subset C_i (i \leqq n)\}$$

$$= P\{w, F_{t_i}(w) \cap C_i^c = \varnothing (i \leqq n)\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{w, F_{ti}(w) \cap C_i^c = \varnothing\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{w, F_{ti}(w) \subset C_i\}$$

则(3.1.3)与(3.1.4)等价，又因

$$I^*(C) = I_*(C^c)^c$$

则 $A_t = \sigma(U_t)$，其中

$$U_t = \{F_t^{-1}(I_*^c(C)), C \text{ 为 } X \text{ 中闭集}\}$$

又 $U_t(t \in T)$ 对交运算封闭，即为 π 系，从而(3.1.4)等价于 $A_t(t \in T)$ 是独立事件类，则证.

定理 3.1.5 若 $\{F_t, t \in T\}$ 是独立的集值随机过程，则由定理 3.1.2 确定的实值随机过程均为独立的实值随机过程.

证明 若 $\varnothing$ 是 $(P_f(X), \sigma(J_t))$ 到 $(R, \mathbf{B})$ 的可测函数，则必然有 $\{\varnothing(F_t), t \in T\}$ 是独立的实值随机过程，由于对 $y > 0$ 有

$$\{A \in \mathbf{P}_f(X), d(x, A) < y\}$$
$$= \{A \in \mathbf{P}_f(X), A \cap S(x, y) \neq \varnothing\}$$
$$= I_*(S(x, y)) \in \sigma(\mathbf{J}_t)$$

则 $d(X, \cdot)$ 是 $(\mathbf{P}_f(X), \sigma(\mathbf{J}_t))$ 到 $(R, \mathbf{B})$ 的可测函数，从而 $\{d(y, F_t), t \in T\}$ 及 $\{|F_t| = d(0, F_t), t \in T\}$ 为独立的实值随机过程，又因为

$$\{A \in \mathbf{P}_f(X), h(x, A) \leqslant y\}$$
$$= \{A \in \mathbf{P}_f(X), A \subset \overline{S}(x, y)\}$$

$$= I_*(\overline{S}(x,y)^c)^c \in \sigma(\mathbf{J}_l)$$

从而$\{h(x,\mathbf{F}_t),t \in T\}$及$\{\| F_t \| = h(0,F_t),t \in T\}$为独立的实值随机过程．同样地，令

$$C = \{x, < x^*, x > \leqslant y\}$$

则C为X中的闭集．于是

$$\{A \in \mathbf{P}_f(X), \sigma(x^*, A) \leqslant y\}$$

$$= \{A, A \subset C\} = I_*(C^c)^c \in \sigma(\mathbf{J}_l)$$

从而$\{\sigma(x^*,F_t),t \in T)\}$也是独立的实值随机过程．

［注］ 定义3.1.2中是利用下拓扑定义集值随机过程的独立性的．同样可以利用上拓扑定义集值随机过程的独立性．这时对于$F \in \mu[\Omega, X]$，记

$$\mathbf{A}_F^* = \sigma\{F^{-1}(I^*(G)), G \text{ 为 } X \text{ 中开集}\}$$

若$\{A_{F_t}^*, t \in T\}$是独立事件类，称集值随机过程为独立的集值过程．显然，它等价于对于任意$n \geqslant 2, t_i \in T(i \leqslant n)$，及$X$的闭集$C_i(i \leqslant n)$，有

$$P\{w, F_{t_i}(w) \cap C_i \neq \varnothing (i \leqq n)\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{w, F_{t_i} \cap C_i \neq \varnothing\} \tag{3.1.4}$$

一般来说$\sigma(\mathbf{J}_l) \neq \sigma(J_u)$，从而，$\mathbf{A}_F \neq \mathbf{A}_F^*$，因此两种独立性概念是不一样的．由定理1.3.16知，对紧的集值随机过程，两种独立性是一致的．这时也和在Hausdorff度量δ意义下的独立性是一致的．

定义3.1.3 设$\{F_t, t \in T\}$为集值随机过程，若对于任意$n \geqq 1, t_i \in T, t_i + \lambda \in T(i \leqq n), \lambda > 0$，及$X$中的开集$G_i(i$

$\leqq n$)，有

$$P\{w, F_{t_i+\lambda}(w) \cap G_i \neq \varnothing (i \leqq n)\}$$
$$= P\{w, F_{t_i} \cap G_i \neq \varnothing (i \leqq n)\} \qquad (3.1.5)$$

称$\{F_t, t \in T\}$为平稳集值随机过程．

定理 3.1.6 若$\{F_t, t \in T\}$是平稳的集值随机过程，则由定理 3.1.2 确定的实值随机过程均为平稳的实值随机过程．

证明 若φ是$(\mathbf{P}_f(X), \sigma(\mathbf{J}_l))$到$(R, \mathbf{B})$的实值的可测函数，则$\{\varphi(F_t), t \in T\}$为平稳实值随机过程，由定理 3.1.5 知$\{|F_t|, t \in T\}$，$\{\|F_t\|, t \in T\}$，$\{d(x, F_t), t \in T\}$，$\{h(x, F_t), t \in T\}$，$\{\sigma(x^*, F_t), t \in T\}$均为平稳的实值随机过程．

定理 3.1.7 集值随机过程$\{F_t, t \in T\}$是平稳的当且仅当，对于任意整数$n \geqq 1, t_i \in T, t_i + \lambda \in T (i \leqq n), \lambda > 0$，及$X$中的闭集$C_i (i \leqq n)$有

$$P\{w, F_{t_i+\lambda}(w) \cap C_i \neq \varnothing (i \leqq n)\}$$
$$= P\{w, F_{t_i}(w) \cap C_i \neq \varnothing (i \leqq n)\} \qquad (3.1.6)$$

证明 由于X是度量空间，对于闭集C_i，存在开集列$G_i^k \downarrow (k \geqslant 1)$，使得

$$C_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_i^k$$

同样，对于开集G_i，存在闭集列$C_i^k \uparrow (k \geqslant 1)$，使得

$$G_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_i^k$$

于是

$$\{w, F_{ti}(w) \cap C_i \neq \varnothing (i \leqq n)\}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \{w, F_{ti}(w) \cap G_i^k \neq \varnothing (i \leqq n)\}$$

$$\{w, F_{ti}(w) \cap G_i \neq \varnothing (i \leqq n)\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{w, F_{ti}(w) \cap C_i^k \neq \varnothing (i \leqq n)\}$$

由概率的连续性即证(3.1.6)与(3.1.7)等价.

定理 3.1.8 若$\{F_t, t \in T\}$是平稳集值随机过程，对于任意闭集C_0，记

$$F'_t(w) = \begin{cases} F_t(w) \cap C_0, & F_t(w) \cap C_0 \neq \varnothing \\ F_t(w), & F_t(w) \cap C_0 = \varnothing \end{cases}$$

则$\{F'_t(w), t \in T\}$仍为平稳的集值随机过程.

证明 首先引进记号

$$A_t = \{w, F_t(w) \cap C_0 \neq \varnothing\}$$

由平稳性，对于任意给定的$\lambda > 0$，有$P(A_{t+\lambda}) = P(A_t)$. 对于闭集$C_1, C_2$，以及$F_{t1}$及$F_{t2}$，记

$$A^{(1)}(w, t_i) = F_{ti}^{-1}(C_0 \cap C_i) \qquad (i = 1, 2)$$

$$A^{(2)}(w, t_i) = F_{ti}^{-1}(C_0)^c \cap F_{ti}^{-1}(C_i) \qquad (i = 1, 2)$$

则

$$A^{(1)}(w, t_i) \cap A^{(2)}(w, t_i) = \varnothing \qquad (i = 1, 2)$$

$$A^{(1)}(w, t_i) \cup A^{(2)}(w, t_i) = \{w, F_{ti}(w) \cap C_i \neq \varnothing\}$$

于是

$$\{w, F_{ti}(w) \cap C_i \neq \varnothing (i \leqq 2)\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{2} [A^{(i)}(w, t_1) \cap A^{(j)}(w, t_2)]$$

由概率的可加性及$\{F_t,t\in T\}$的平稳性即证

$$P\{w,F'_{t_i+h}(w)\cap C_i\neq\varnothing(i\leqq 2)\}$$
$$=P\{w,F'_{t_i}(w)\cap C_i\neq\varnothing(i\leqq 2)\}$$

用归纳法可证对一般的n成立，即$\{F_t,t\in T\}$为平稳的集值随机过程．

定理3.1.9 若X是自反的，$\{F_t,t\in T\}$是闭凸的平稳集值随机过程，则存在向量随机过程$\{f_t,t\in T\}$，使$f_t(w)\in F_t(w)(w\in\Omega,t\in T)$且$\{\|ft(w)\|,t\in T\}$为平稳过程．

证明 任取$x\in X$，令

$$\pi(x,F_t(w))=\{y,d(x,y)=d(x,F_t(w))\}$$

由于X自反，则$\pi(x,F_t(w))\neq\varnothing(w\in\Omega,t\in T)$．令

$$\mathrm{Gr}\pi(x,F_t)=\{(w,y),d(x,y)=d(x,F_t(w))\}$$

则$\mathrm{Gr}\pi(x,F_t)\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$．由定理2.1.6及定理2.1.7，$F_t$存在强可测选择$f_t(w,x)(t\in T)$．由定理3.1.6知

$$\|x-f_t(w,x)\|=d(x,F_t(w))$$

是平稳的，特别取$x=0$则证．

定理3.1.10 若X是自反的，$\{F_t,t\in T\}$是闭凸的集值随机过程，则存在一列X值随机过程$\{f_t^k,t\in T\}(k\geqslant 1)$，使

$$F_t(w)=\mathrm{cl}\{f_t^k(w),k\geqslant 1\}$$

且对任意$k\geqslant 1$，$\{\|f_t^k\|,t\in T\}$为实值平稳过程．

证明 设$\{x_m,m\geqslant 1\}$为X的稠密子集，令

$$F_t^{mn}(w)=\begin{cases}F_t(w)\cap\overline{S}(x_m,\frac{1}{2^n}), & w\in A_t^{mn}\\ f_t(w), & w\notin A_t^{mn}\end{cases}$$

其中

$$A_t^{mn} = \{w, F_t(w) \cap \overline{S}(x_m, \frac{1}{2^n}) \neq \varnothing\}$$

由定理3.1.8知$\{F_t^{mn}, t \in T\}(m,n \geqslant 1)$为平稳集值随机过程. 由定理3.1.9,存在$f_t^{mn}(w) \in F_t^{mn}(w)(w \in \Omega, m,n \geqslant 1)$且$\{\| f_t^{mn} \|, t \in T\}$为实值平稳过程,类似定理2.1.8可证

$$F_t^{mn}(w) = \mathrm{cl}\{f_t^{mn}(w), m,n \geqslant 1\}$$

即证.

推论3.1.1 对于区间值随机过程$F_t = [\zeta_t, \eta_t]$,若$\{F_t, t \in T\}$平稳,则$\{\zeta_t, t \in T\}$及$\{\eta_t, t \in T\}$是平稳的实值过程.

例3.1.1 设$\eta_n(n \geqslant 1)$是二维独立的正态分布序列,且

$$\eta_n \sim N(a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, r_n)$$

记它的密度函数为$P_n(x,y)$. 令

$$\eta_n = (f_n, g_n)$$

则$f_n \sim N(a_1, \sigma_1)$是独立同分布随机序列,$g_n \sim N(a_2, \sigma_2)$也是独立的同分布的随机序列,因此$\{f_n, n \geqslant 1\}$及$\{g_n, n \geqslant 1\}$均为平稳序列. 记

$$F_n(w) = \mathrm{cl}\{f_n(w), g_n(w)\}$$

则对任意$a > 0, n \geqslant 1$有

$$\begin{aligned} & P\{w, \| F_n(w) \| \leqslant a\} \\ & = P\{w, |f_n(w)| \leqslant a, |g_n(w)| \leqslant a\} \\ & = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} P_n(x,y) dx dy \end{aligned}$$

与n有关,故$\{\| F_n \|, n \geqslant 1\}$非平稳,从而$\{F_n, n \geqslant 1\}$非平

稳.

定义 3.1.4 设$\{(F_t,\mathbf{F}_t),t\in T\}$是适应的集值随机过程，若对于任意$F\in\mu[\Omega,X]$，$F$可积，且关于$\mathbf{A}_{F_s}(s\geq t,s\in T)$可测时有

$$E(F/\mathbf{F}_t)=E(F/\mathbf{A}_{F_t})\text{a.e.} \qquad (3.1.7)$$

称$\{(F_t,\mathbf{F}_t),t\in T\}$为马尔可夫集值随机过程. 若

$$\mathbf{F}_t=\sigma\{\mathbf{A}_{F_s},s\leqq t,s\in T\}=\mathbf{A}_t$$

称$\{(F_t,t\in T\}$为马尔可夫集值随机过程.

定理3.1.11 设X^*可分，$\{(F_t,\mathbf{F}_t),t\in T\}$是闭凸值的适应的集值随机过程，则下列条件等价：

(1) $\{F_t,t\in T\}$是马尔可夫集值随机过程;

(2) 对于任意关于$\mathbf{A}_{F_s}(s\geqslant t,s\in T)$可测的实值变量$\zeta$有

$$E(\zeta/\mathbf{F}_t)=E(\zeta/\mathbf{A}_{F_t})\text{a.e.} \qquad (3.1.8)$$

证明 设ζ关于$\mathbf{A}_{F_s}(s\geqslant t,s\in T)$可测，则对于$x\neq 0$，$x\in X$，$f(w)=x\cdot\zeta(w)$关于$\mathbf{A}_{F_t}$可测. 若$\{F_t,t\in T\}$是马尔可夫集值随机过程，则

$$E(x\cdot\zeta/\mathbf{F}_t)=E(x\cdot\zeta/\mathbf{A}_{F_t})\quad \text{a.e.}$$

$$xE(\zeta/\mathbf{F}_t)=x\cdot E(\zeta/\mathbf{A}_{F_t})\quad \text{a.e.}$$

即证(3.1.8)成立，即证(1)⇒(2)，下面证(2)⇒(1).

若F关于$\mathbf{A}_{F_s}(s\geqq t,s\in T)$可测，则$\sigma(x^*,F)$关于$\mathbf{A}_{F_t}$可测. 由(3.1.8)有

$$E(\sigma(x^*,F)/\mathbf{F}_t)=E(\sigma(x^*,F)/\mathbf{A}_{F_t})\quad \text{a.e.}$$

由定理 2.4.18，存在 $N \in \mathbf{A}, P(N)=0, w \notin N$ 时，对于所有 $w \notin N$ 有

$$\sigma(x^*, E(F/\mathbf{F}_t)) = \sigma(x^*, E(F/\mathbf{A}_{F_t}))$$

由于 F 是闭凸的，则 $E(F/\mathbf{F}_t)$ 及 $E(F/\mathbf{F}_{F_t})$ 是闭凸的，于是

$$E(F/\mathbf{A}_{F_t}) = E(F/\mathbf{A}_{F_t}) \quad \text{a.e.}$$

则证 $\{F_t, t \in T\}$ 为马尔可夫集值随机过程.

例 3.1.2 设 $\{\zeta_t, t \in T\}$ 是实值马尔可夫随机过程，则

$$F_{1t}(w) = (-\infty, \zeta_t(w)]$$

$$F_{1t}(w) = \{x, < x^*, x > \leqq \zeta_t(w)\}$$

均为集值马尔可夫过程.

[注] 定义 3.1.4 中集值马尔可夫过程的定义(3.1.7)似乎太强.

即使 $\{\zeta_t, t \in T\}$ 与 $\{\eta_t, t \in T\}$ 为实值马尔可夫过程，$F_t(w) = \mathrm{cl}\{\zeta_t(w), \eta_t(w)\}$ 也未必是集值马尔可夫过程. 因此可以考虑下面较弱的定义，即对于任意 $x^* \in X^*$，$\{\sigma(x^*, F_t(w)), t \in T\}$ 为实值马尔可夫过程，称 $\{F_t, t \in T\}$ 为集值马尔可夫过程.

§3.2 集值随机过程的可分性与可测性

设 $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ 为完备的概率空间，X 是度量空间，$\{F_t(w), t \in T\}$ 为 X 上的集值随机过程，在许多问题中，事件

$$A_G = \{w, F_t(w) \subset C(\forall\, t \in G)\} \qquad (3.2.1)$$

起着重要作用，其中 G 为 T 中开集，C 为 X 中闭集，由于 G 一般是不可数集，故不能断定 $A_G \in \mathbf{A}$，为了解决这一问题，下面研究集值随机过程的可分性．

定义3.2.1 称 $\{F_t, t \in T\}$ 为 δ 可分的，若存在 T 的稠密子集 I 及 Ω 的零测度 N，当 $w \notin N$ 时，对于任意 $t \in T$，存在 $t_n \in I, t_n \to t$ 及 $\delta(F_{t_n}(w), F_t(w)) \to 0$. I 称为可分集，N 称为例外集．如果以上性质对 T 中任意稠密子集 I 均成立，称 $\{F_t, t \in T\}$ 是 δ 完全可分的．

我们指出，可以更换定义 3.2.1 中的收敛性而得到其它的可分性，如 $K.M$ 可分，K 可分，w 可分等．也可用其它拓扑得到其它可分性，如 $\mathbf{J}_l, \mathbf{J}_u, \mathbf{J}_v, \mathbf{J}_c$ 等．

定理 3.2.1 如果 $\{F_t, t \in T\}$ 是 δ 可分的，则

$$A_G \in \mathbf{A}_0$$

证明 若 $\{F_t, t \in T\}$ 是 δ 可分的，记

$$A_{GI} = \{w, F_t(w) \subset C(\forall\, t \in G \cap I)\} \qquad (3.2.2)$$

显然有 $A_G \subset A_{GI}$. 若 $w \notin N$, $\forall\, t \in G$, 存在 $t_n, \in G \cap I$ 使得 $t_n \to t$ 且 $\delta(F_{t_n}(w), F_t(w)) \to 0$. 于是对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 N_0，当 $n \geqslant N_0$ 时

$$F_t(w) \subset F_{t_n}(w) + \varepsilon \subset C + \varepsilon$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性及 C 的闭性，我们容易证明 $F_t(w) \subset C$. 于是 $w \notin N$ 时 $A_G = A_{GI}$. 因此

$$(A_{GI} \backslash A_G) \subset N \qquad (3.2.3)$$

即 A_G 与 A_{GI} 只差零测度集．由于 $A_{GI} \in \mathbf{A}$ 及 P 的完备性，即

证 $A_G \in \mathbf{A}$.

[注] 定理3.2.1证明中易见，只要$\{F_t(w),t\in T\}$是δ_n可分的，则$A_G \in \mathbf{A}$. 由于只要(3.2.3)成立，即有$A_G \in \mathbf{A}$，因此也可将满足(3.2.3)的集值随机过程称为可分的，即存在T的稠密集I及Ω的零测度集N，对于X中任意闭集C及T中任意开集G，由(3.2.1)及(3.2.2)中定义的A_G与A_{GI}满足(3.2.3)时，称$\{F_t,t\in T\}$是可分的，或者弱可分的.

定理3.2.2 设$\{F_t,t\in T\}$是δ可分的(完全可分的)，则下面的实值随机过程也是δ可分的(完全可分的).

(a) $\{\|F_t\|,t\in T\}$;

(b) $\{d(x,F_t),t\in T\}(x\in X)$;

(c) $\{h(x,F_t),t\in T\}(x\in X)$;

(d) $\{|F_t|,t\in T\}$;

(e) $\{\sigma(x^*,F_t),t\in T\}(x^*\in X^*)$.

证明 由于

$$\delta(F_{t_n}(w),F_t(w)) = \sup|d(x,F_{t_n}(w)) - d(x,F_t(w))|$$
$$= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}|\sigma(x^*,F_{t_n}(w)) - \sigma(x^*,F_t(w))|$$

及σ关于X^*的正齐次性即证(b),(e). 由于

$$\|F_t(w)\| = \delta(F_t(w),\{0\})$$
$$|F_t(w)| = d(0,F_t(w))$$
$$h(x,F_t,(w)) = \delta(F_t(w),\{x\})$$

则证(a)(c)(d). 例如，由$\{F_t,t\in T\}$可分，存在可分集I及例外集N，$w\notin N$，$t\in T$，存在$t_n\in I$，使得$t_n\to t$及$\delta(F_{t_n}(w)$,

$F_t(w)) \to 0$. 从而

$$\begin{aligned}&|h(x,F_{t_n}(w)) - h(x,F_t(w))|\\&= |\delta(F_{t_n},\{x\}) - \delta(F_t(w),\{x\})|\\&\leqslant \delta(F_{t_n}(w);F_t(w)) \to 0\end{aligned}$$

则证(c). 其它情形类似.

[注] 如果$\{d(x,F_t),t \in T\}(x \in X)$关于$x$是一致可分的,即对稠密集$I$及例外集$N$, $\forall t \in T$,存在$t_n \in I(n \geqslant 1)$,使$t_n \to t$时$d(x,F_{t_n})$一致的收敛于$d(x,F_t)$,则$\{F_t,t \in T\}$也是可分的. 如果$\{\sigma(x^*,F_t),t \in T\}(x^* \in X^*)$关于$x^*$在$\|x^*\| \leqslant 1$上一致可分,即$\forall t \in T$,存在$t_n \in I(n \geqslant 1)$,那么使得$t_n \to t$及$\sigma(x^*,F_{t_n})$在$\|x^*\| \leqslant 1$上一致收敛到$\sigma(x^*,F_t)$,则$\{F_t,t \in T\}$可分.

设$\{F_t,t \in T\}$是集值随机过程,I是T的稠密集,$\mathbf{S}$表示T中以两个有理数为端点的开区间S的全体,对于任意开集$G \subset T$,记

$$A(G,w) = \mathrm{cl}\{\bigcup\{F_t(w),t \in G \cap I\}\} \quad (3.2.4)$$

$$A(t,w) = \bigcap\{A(S,w),t \in S,S \in \mathbf{S}\} \quad (3.2.5)$$

显然$\{A(s,w),S \in \mathbf{S},t \in S\}$是集中的,即它们中任意有限个元素的交非空. 若$X$是紧的,则$A(t,w) \neq \varnothing$.

定理3.2.3 $\{F_t,t \in T\}$是弱可分的充要条件为$\forall S \in \mathbf{S}$,

$$F_t,(w) \subset A(S,w)(t \in S,w \notin N) \quad (3.2.6)$$

若$\mathbf{X}$是紧的,$\{F_t,t \in T\}$是弱可分的充要条件为

$$F_{t},(w) \subset A(t,w)(w \notin N) \quad (3.2.7)$$

证明　首先由于T中任意开集G可表为**S**中元素的并，(3.2.3)等价于对$S \in \mathbf{S}$的(3.2.3)成立，若$\{F_t, t \in T\}$是可分的，由(3.2.3)知，$F_{t'}(w) \subset C(t' \in S \cap I, w \notin N)$可推出$F_{t'}(w) \subset C(t' \in S, w \notin N)$. 由于$F_t(w) \subset A(S,w)(t \in S \cap I, w \notin N)$则得(3.2.6). 若(3.2.6)成立，由$F_{t'}(w) \subset C(t' \in S \cap I, w \notin N)$时$A(S,w) \subset C$，则$F_t(w) \subset A(S,w) \subset C(t \in S)$，则证(3.2.3).

若X是紧的，则$A(t,w) \neq \varnothing$. 由于$\{F_t, t \in T\}$可分当且仅当(3.2.6)成立，则证(3.2.7)成立.

若$\{F_t, t \in T\}$是δ可分的，显然(3.2.6)成立.

定理3.2.4　设X是可分的局部紧的度量空间，对于任意集值随机过程$\{F'_t(w), t \in T\}$存在弱可分的集值随机过程$\{F_t(w), t \in T\}$，使$\forall\, t \in T$

$$P\{w, F_t(w) \neq F't(w)\} = 0 \quad (3.2.8)$$

即与原过程随机等价.

证明　首先假定X是紧的度量空间，分以下三步证明定理.

(1)　对于$B \in \mathbf{B}(X)$，存在$t_k(k \geqslant 1)$，使对任意$t \in T$，有

$$N(t,B) = \{w, F_{t_k}(w) \subset B(k \geqslant 1),\ F_t(w)\text{不含于}B\}$$

为概率0集. 下面用递归方法构造，t_1任取，若$t_1, \cdots, t_n$已构造出，令

$$m_n = \sup_{t \in T} P\{w, F_{t_k}(w) \subset B(k \leqslant n), F_t(w) \text{ 不含于 } B\}$$

若 $m_n = 0$，已证．若 $m_n > 0$，可取 t_{n+1} 使对集合

$$L_n = \{w, F_{tk}(w) \subset B(k \leqslant n), F_{tn+1} \text{ 不含于 } B\} \tag{3.2.9}$$

有 $P\{L_n\} \geqslant 0$，且 L_n 不相交，则

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} m_k \leqslant \sum_{K=1}^{\infty} P\{L_k\} \leqslant 1$$

故 $m_k \to 0(k \to \infty)$，于是 $\forall\, t \in T$ 有

$$P\{N(t,B)\} \leqslant \text{clim}\, m_n = 0$$

(2) 设 L 是 X 的可数稠密点集，令

$$\mathbf{M}_0 = \{S(x,r)^c, x \in L, r \text{ 为有理数}\}$$

则 X 中所有闭集必含在 $\mathbf{M}_0$ 中所有可能序列之交给成的集合类 $\mathbf{M}$．按照(1)，对于 $B \in \mathbf{M}_0$，可构造 $t_k(k \geqslant 1)$，使 $\forall\, t \in T$，$P\{N(t,B)\} = 0$．取 I 为以上方法构造的 $t_k(k \leqslant 1)$ 的并集，并记

$$N(t) = \bigcup \{N(t,B), B \in \mathbf{M}_0\} \tag{3.2.10}$$

则 $P\{N(t)\} = 0$．可以证明，$\forall\, B \in \mathbf{M}$ 有

$$\{w, F_{tn}(w) \subset B(t_n \in I), F_t(w) \text{ 不含于 } B\} \subset N(t) \tag{3.2.11}$$

事实上，由于 $B' \in \mathbf{M}_0$ 时可表示为 $B' = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$，其中 $B_k \in \mathbf{M}_0$．可以证明，$\forall\, k \geqslant 1$ 有

$$\{w, F_{tn}(w) \subset B'(t_n \in I), F_t(w) \text{ 不含于 } B_k\}$$
$$\subset N(t,B) \subset N(t)$$

则证(3.2.11)成立.

(3) 设$\mathbf{S}$表示T中以有理数为端点的区间全体. 对于任意$S \in \mathbf{S}$,集值随机过程$\{F_t(w), t \in S\}$可以像(2)中一样构造出$I(s), N_s(t)(s \in \mathbf{S})$. 记

$$J = \bigcup \{I(s), s \in \mathbf{S}\}$$

$$N'(t) = \bigcup \{N_s(t), s \in \mathbf{S}\}$$

当$t \in J$或$w \notin N'(t)$时,记

$$F'_t(w) = F_t(w)$$

当$t \notin T$且$w \in N'$时,记$F'_t(w) = A(t,w)$. 易证

$$F'_t(w) \subset A(t,w)$$

且$\{w, F'_t(w) \neq F_t(w)\} \subset N'(t)$. 由定理3.2.3则证.

最后,若X是可分的局部紧的度量空间,则它必为某一紧空间$\tilde{X}$的子集. 而且X中每一个闭集F必为$\tilde{X}$中闭集. 因为取值X上的集值随机过程必为$\tilde{X}$上集值随机过程,那么我们由(3)则证存在$\tilde{X}$上弱可分的随机等价的集值随机过程. 由于$P\{F'_t(w) \neq F_t(w)\}$的(t,w)只要取$F'_t(w) \subset A(t,w)$即可,所以可在X中取值.

[注] 可以仿照(3.2.3)定义另外一种弱可分性. 即对于T中开集G及X中开集G',记

$$B_G = \{w, F_t(w) \cap G' \neq \emptyset (\forall\ t \in G)\}$$

$$B_{GI} = \{w, F_t(w) \cap G' \neq \emptyset (\forall\ t \in G \cap I)\}$$

其中I为T中可数稠密集. 若存在概率0集N,使

$$B_{GI} / B_G \subset N$$

称为弱可分的．显然 δ 可分时，也是这种类型弱可分的．

可在这种弱可分意义下讨论定理 3.2.3 与定理 3.2.4.

定义 3.2.2 集值随机过程 $\{F_t(w), t \in T\}$ 在 t_0 随机连续，若 $t \to t_0$ 时，$\forall\ \varepsilon > 0$ 有

$$P\{\delta(F_t(w), F_{t_0}(w)) > \varepsilon\} \to 0$$

若在任意 $t \in T$ 随机连续，则称 $\{F_t(w), t \in T\}$ 随机连续．

定理3.2.5 我们假设 X 是度量空间，$\{F_t(w), t \in T\}$ 是随机连续的 δ 可分的集值随机过程．则为完全 δ 可分的集值随机过程，若 $\{$若 $F_t(w), t \in T\}$ 是弱可分的集值随机过程且随机连续，则为完全弱可分的集值随机过程．

证明 设 I 是 δ 可分集，J 为 T 的另一稠集，$\forall\ t \in I$. 存在 $t_i \in J(i \geqslant 1)$，且 $t_i \to t_0$，于是

$$P\{\delta(F_{ti}(w), F_t(w)) > \varepsilon\} \to 0$$

从而有子列 $\{t_i'\} \subset \{t_i\}$，使

$$P\{\lim \delta(F_{t'i}(w), F_t(w)) = 0\} = 1$$

由 I 的可数性，存在 N'，$P\{N'\} = 0$，当 $w \notin N$，$t \in I$，存在 $t_i \in J(i \geqslant 1)$，使 $(\delta) F_{ti}(w) \to F_t(w)$ (a.e.)，利用 I 为可分集，则证 J 也为可分集，故完全 δ 可分．

现证定理后半部分，设 $I = \{t_k, k \geqslant 1\}$ 为弱可分集，N 为 w 的例外集，J 为 T 中另一稠密集．S 是 T 中有理端点集．记

$$B(S, w) = \mathrm{cl} \bigcup \{F_{tk}(w), t_k \in S \cap J\} (S \in S)$$

$$N(S, k) = \{w, F_{tk}(w) \subset B(S, w) \text{ 不成立} (t_k \in S)\}$$

设 $t_k \in S, t'_r \in S \cap J, t'_r \to t_k (r \to \infty)$，则

$$P\{w, F_{tk}(w) \subset B(S,w) \text{ 不成立}\}$$
$$\leqslant P\{\lim_{r\to\infty} \delta(F_{tk}(w), F_{t'r}(w)) > 0\}$$
$$\leqslant \lim_{r\to\infty} \lim_{r\to\infty} P\{w, \delta(F_{tk}(w), F_{t'r}(w)) > \frac{1}{n}\} = 0$$

令

$$N' = \bigcup \{N(S,k), S \in \mathbf{S}, x_k \in S\}$$

则 $P\{N'\} = 0$. 当 $w \notin N \cup N'$ 时，$S \in \mathbf{S}$ 及 $t_k \in S$ 有

$$F_{tk}(w) \subset B(S,w)$$

由定理 3.2.3 则证 $\{F_t,(w), t \in T\}$ 是弱可分的．

设 $\mathbf{B}(T)$ 为 T 上的 Borel σ 代数，$\overline{\mathbf{B}}(T)$ 为 $\mathbf{B}(T)$ 的完备化．L 为 T 上的 Lebesque 测度，$\overline{\mathbf{B}(T) \times \mathbf{A}}$ 及 $\mathbf{B}(T) \times \mathbf{A}$ 为乘积 σ 代数．

定义 3.2.3 称集值随机过程 $\{F_t(w), t \in T\}$ 是可测的，若对于任意 $B \in \mathbf{B}(X)$，有

$$\{(t,w), F_t(w) \cap B \neq \varnothing\} \in \overline{\mathbf{B}(T) \times A}$$

称 $\{F_t(w), t \in T\}$ 为 Borel 可测的，若对任意 $B \in \mathbf{B}(X)$ 有

$$\{(t,w), F_t(w) \cap B \neq \varnothing\} \in \mathbf{B}(T) \times \mathbf{A}$$

定理 3.2.6 X 可分，$\{F_t(w), t \in T\}$ 可测的充要条件为存在一列 X 值可测的随机过程 $\{f_t^{(n)}(w), n \geqslant 1\}$，使

$$F_t(w) = \mathrm{cl}\{f_t^{(n)}(w), n \geqslant 1\} (w \in \Omega, t \in T)$$

证明 若 $\{F_t(w), t \in T\}$ 可测，记

$$F(t,w) = F_t(w) \ (w \in \Omega, t \in T)$$

由定理 2.1.8 知存在一列 X 值的可测的集值随机变量 $\{f^{(n)}(t,w),n\geqslant 1\}$ 使得

$$F(t,w)=\mathrm{cl}\{f^{(n)}(t,w),n\geqslant 1\}(t\in T,w\in\Omega)$$

令 $f_t^{(n)}(w)=f^{(n)}(t,w)$ 则$\{f_t^{(n)}(w),t\in T\}$ $(n\geqslant 1)$ 是一列 X 值可测的集值随机过程，且

$$F_t(w)=\mathrm{cl}\{f_t^{(n)}(w),n\geqslant 1\}(t\in T,w\in\Omega)$$

相反的情形同样由定理 2.1.8 得证.

定理 3.2.7 设$\{F_t(w),t\in T\}$ 是可测的集值随机过程，则存在 $N\in\mathbf{A},P(N)=0,w\notin N$ 时，$F_t(w)$ 关于 t 是$\overline{\mathbf{B}(T)}$ 可测的.

证明 由定理 3.2.6 知

$$F_t(w)=\mathrm{cl}\{f_t^{(n)}(w),n\geqslant 1\}(w\in\Omega)$$

$\{f_t^{(n)}(w),t\in T\}(n\geqslant 1)$ 是一列可测的 X 值随机过程. 于是存在 $N_n\in\mathbf{A},P(N_n)=0,w\notin N_n$ 时，$f_t^{(n)}(w)$ 关于 t 是 $\overline{\mathbf{B}}(T)$ 可测的. 令 $N=\bigcup N_n,P(N)=0$. 当 $w\notin N$ 时，$n\geqslant 1$，$f_t^{(n)}(w)$ 关于 t 是 $\overline{\mathbf{B}}(T)$ 可测的. 由定理 2.1.8 知 $F_t(w)$ 关于 t 是$\overline{\mathbf{B}(T)}$ 可测的.

定理 3.2.8 设 X 是可分的局部紧的度量空间，$\{F_t(w),t\in T\}$ 是随机连续的，则存在随机等价的$\{F'_t(w),t\in T\}$ 是弱可分可测的集值随机过程.

证明 仿照 X 值随机过程可证(见基赫曼，随机过程，中文版，第一卷 p.174—p.176).

§3.3 集值随机过程的收敛表示定理

讨论集值随机过程的可分性，主要涉及集值随机序列的收敛性．本节讨论集值随机过程的收敛性与其 Castaing 表示的收敛性的关系．仍然假定$(\Omega,\mathbf{A})$是完备的可测空间，X是可分的 Banach 空间．

定理 3.3.1 设$\{F_n,n\geqslant 1\}$为集值随机序列，$F(w)$为集值随机变量，且对于所有$w\in\Omega$，有

$$F(w)\subset s\text{-}\lim\inf F_n(w) \qquad (3.3.1)$$

若$f(w)$是$F(w)$的可测选择，则存在$F_n(w)$的可测选择$f_n(w)(n\geqslant 1)$，使得

$$(s)f_n(w)\to f(w)\ (w\in\Omega) \qquad (3.3.2)$$

证明 记

$$L_n(w)=\{x\in F_n(w),\ \|x-f(w)\|\leqslant d(f(w),F_n(w))+\frac{1}{n}\}$$

$$\varphi(w,x)=\|x-f(w)\|-d(f(w),F_n(w))$$

则L_n的图为

$$\mathrm{Gr}L_n=\{(w,x),\varphi(w,x)\leqslant\frac{1}{n}\}\cap\mathrm{Gr}F_n$$

由于$\varphi(w,x)$是$\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$可测的，则$\mathrm{Gr}L_n\in\mathbf{A}\times\mathbf{B}(X)$．据定理 2.16 及定理 2.17 知$L_n$有可测选择$f_n(w)(n\geqslant 1)$．于是

$$f_n(w) \in F_n(w) \quad (w \in \Omega, n \geqslant 1)$$

$$\| f_n(w) - f(w) \| \leqslant d(f(w), F_n)) + \frac{1}{n}$$

由(3.3.1)知，$f(w) \in s\text{-}\lim\inf F_n(w)(w \in \Omega)$，则 $d(f(w), F_n(w)) \to 0$. 从而 $\| f_n(w) - f(w) \| \to 0(n \to \infty)$ 对于所有 $w \in \Omega$ 成立．(3.3.2) 得证．

定理3.3.2 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$为集值随机序列，$F(w)$ 为集值随机变量，且对于所有 $w \in \Omega$，有

$$f(w) \subset s\text{-}\lim\inf F_n(w)$$

若 $F(w)$ 的Castaing 表示为$F(w) = \text{cl}\{f^{(k)}(w), k \geqslant 1\}$，则存在 $F_n(w)$ 的 Castaing 表示 $F_n(w) = \text{cl}\{f_n^{(k)}(w), k \geqslant 1\}$，使得 $k \geqslant 1$ 及 $w \in \Omega$，有

$$(s) f_n^{(k)}(w) \to f^{(k)}(w)(n \to \infty) \qquad (3.3.3)$$

证明 由定理 3.3.1，对于任意 $k \geqslant 1$，存在 $g_n^{(k)}(w)$ 是 F_n 的可测选择，使 $g_n^{(k)}(w) \to f^{(k)}(w)(n \to \infty, w \in \Omega)$. 由定理 2.1.8，对于任意 $n \geqslant 1$ 存在 F_n 的 Castaing 表示 $F_n(w) = \text{cl}\{h_n^{(k)}(w), k \geqslant 1\}(w \in \Omega)$. 记

$$f_n^{(k)}(w) = \begin{cases} g_n^{(k)}(w), & k \leqslant n \\ h_n^{(k-n)}(w), & k > n \end{cases}$$

显然有 $F_n(w) = \text{cl}\{f_n^{(k)}(w), k \geqslant 1\}(w \in \Omega)$，且(3.3.3) 成立．

推论3.3.1 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值随机序列，$F(w)$ 为集值随机变量．若 $\delta_a(F_n(w), F(w)) \to 0(w \in \Omega)$，特别

$\delta(F_n(w)), F(w) \to 0 (w \in \Omega)$ 时，定理 3.3.1 与定理 3.3.2 成立.

证明 由定理 1.5.6 知，当 $\delta_u(F_n(w), F(w)) \to 0 (w \in \Omega)$ 时，必有 $F(w) \subset s\text{-}\lim_n \inf F_n(w) (w \in \Omega)$，则证.

推论 3.3.2 设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 为集值随机变量序列，$F(w)$ 为集值随机变量，$F(w) \subset s\text{-}\lim_n \inf F_n(w) (w \in \Omega)$ 成立的充要条件为对于 $F(w)$ 的任意可测选择，存在 $F_n(w)$ 的可测选择 $f_n(w) (n \geqslant 1)$ 使 $\| f_n(w) - f(w) \| \to 0 (w \in \Omega)$.

证明 由定理 3.3.1 及定理 2.1.8 则证.

例 3.3.1 取 $X = R^1, F_n(w) = [0,1] (w \in \Omega, n \geqslant 1)$，则有

$$\delta(Fn(w), [0,1]) \to 0 (w \in \Omega)$$

从而 $s\text{-}\lim_n \inf F_n(w) = [0,1] (w \in \Omega)$. 由定理 3.3.2，存在 $F_n(w)$ 的 Castaing 表示 $F_n(w) = \mathrm{cl}\{f_n^{(k)}(w), k \geqslant 1\}$，使 $\| f_n^{(k)} - f^{(k)}(w) \| \to 0 (w \in \Omega, k \geqslant 1)$，且 $[0,1] = \mathrm{cl}\{f^{(k)}(w), k \geqslant 1\}$. 如果取

$$g_n^{(k)}(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & k \leqslant n \\ f_n^{(k-n)}(w) & k > n \end{cases}$$

则 $F_n(w) = \mathrm{cl}\{g_n^{(k)}(w), k \geqslant 1\}$，但是 $\| g_n^{(k)} - \dfrac{1}{2} \| \to 0 (w \in \Omega)$. 也即不是 $F_n(w)$ 的所有 Castaing 表示都满足定理 3.3.2.

下面我们在 R^m 中具体构造集值随机序列收敛的 Castaing 表示.

R^m 中的一个子集 M 称为仿射集，若 $x \in M, y \in M, \lambda \in R$，有 $(1-\lambda)x + \lambda y \in M$. 包含 $S(\subset R^m)$ 的所有仿射集的交称为 S 的仿射包，记为 aff$S$，若

$$\text{aff}\{b_0, b_1, \cdots, b_m\} = R^m$$

称 R^m 中的 $m+1$ 个向量 $b_0, b_1, \cdots, b_m$ 是仿射独立的，记

$$b = (b_0, b_1, \cdots, b_m)$$

为一个仿射独立系，对于 R^m 中非空闭集 M，记

$$M_1 = \{x \in M, d(x, b_0) = d(b_0, M)\}$$

$$M_2 = \{x \in M_1, d(x, b_1) = d(b_1, M_1)\}$$

一般地，记

$$M_{(k)} = \{x \in M_{k-1}, d(b_{k-1}, x) + d(b_{k-1}, M_{k-1})\}$$

$$(2 \leqslant k \leqslant m+1)$$

则 M_{m+1} 为单点集，称 $P_m b = \tilde{M}'_{m+1}$ 为 M 关于 b 的 Castaing 投影，记 Q 为 R^m 中全体有理点集，记

$$A = \{b_k = (b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \cdots, b_m^{(k)})\}$$

则 A 为可数集，且对于 R^m 中任意非空闭集 M 有 Castaing 表示

$$M = \text{cl}\{P_m b_k, b_k \in A\}$$

仍然为集值随机变量，则 $F(w)$ 有 Castaing 表示

$$F(w) = \text{cl}\{P_{F(w)} b_k, b_k \in A\}$$

定理 3.3.3 设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 为 R^m 中集值随机序列，$F(w)$ 为 R^m 中集值随机变量. 记

$$f_n(w) = \text{cl}\{P_{Fn(w)} b_k, b_k \in A\}$$

$$f(w) = \text{cl}\{P_{F(w)} b_k, b_k \in A\}$$

若 $\delta(F_n(w),F(w))\to 0(w\in\Omega)$，则 $b_k\in A$ 有

$$\| P_{F_n(w)}b_k - P_{F(w)}b_k \| \to 0(w\in\Omega) \qquad (3.3.4)$$

证明 为证(3.3.4)只须考虑仿射独立系

$$b=(b_0,b_1,\cdots,b_m)$$

记

$$f_n^{(0)}(w)=\{x\in F_n(w),d(b_0,x)=d(b_0,F_n(w))\}$$

$$f^{(0)}(w)=\{x\in F(w),d(b_0,x)=d(b_0,F(w))\}$$

易证

$$s\text{-}\limsup_n F_n^{(0)}(w)\subset F^{(0)}(w)\subset s\text{-}\liminf_n F_n^{(0)}(w)$$

从而 $\delta(F_n^{(0)}(w),F^{(0)}(w))\to 0(w\in\Omega)$. 一般地记

$$F_n^{(j+1)}(w)=\{x\in F_n^{(j)}(w),d(b_{j+1},x)=d(b_{j+1},F_n^{(j)}(w))\}$$

$$F^{(j+1)}(w)=\{x\in F^{(j)}(w),d(b_{j+1},x)=d(b_{j+1},F^{(j)}(w))\}$$

同样有 $\delta(F_n^{(j+1)}(w),F^{(j+1)}(w))\to 0(w\in\Omega)$. 特别有

$$\delta(P_{F_n(w)}b,P_{F(w)}b)=\delta(F_n^{(m)}(w),F^{(m)}(w))\to 0$$

则证.

推论 3.3.3 设 $\{F_t,t\in T\}$ 是 R^m 中的 δ 可分的随机过程，则存在 Castaing 表示

$$F_t(w)=\mathrm{cl}\{f_t^{(k)}(w),k\geq 1\}(w\in\Omega)$$

使 $\forall\ k\geq 1,\{f_t^{(k)}(w),t\in T\}$ 是可分的向量值随机过程.

证明 记

$$F_t(w)=\mathrm{cl}\{P_{F_t(w)}b_k,b_k\in A\}$$

由于 $\{F_t,t\in T\}$ 为 δ 可分的，则存在可分集 I 及例外集 N，当 $w\notin N$ 时，对于任意 $t_0\in T$，存在 $t_n\in I,t_n\to t_0$，且 $\delta(F_{t_n}(w)$.

$F_{t_0}(w)) \to 0$. 于是对于任意 $b_k \in A$，$\| P_{F_{tn}(W)} b_k - P_{F_{t_0}(w)} b_k \| \to 0$，即 $\{f_t^{(k)}, t \in T\}(k \geqslant 1)$ 是可分的．而且对于 $k \geqslant 1$ 有公共的例外集与可分集．

§3.4 集值随机序列的强大数定律

首先研究两个集值随机变量的同分布性质．

定义3.4.1 设$(\Omega, \mathbf{A}, P)$为概率空间，F_1, F_2为两个集值随机变量，对于任意 $\mathbf{U} \in \sigma(\mathbf{J}_l)$ 有

$$P\{F_1^{-1}(\mathbf{U})\} = P\{F_2^{-1}(\mathbf{U})\} \qquad (3.4.1)$$

称 F_1 与 F_2 为同分布的．

定理3.4.1 若F_1和F_2为同分布的集值随机变量，则对于 X 中任意开集 G，均有

$$P\{w, F_1(w) \cap G \neq \varnothing\} = P\{w, F_2(w) \cap G \neq \varnothing\} \qquad (3.4.2)$$

证明 若取 $\mathbf{U} = I_*(G)$，则 $\mathbf{U} \in \sigma(J_l)$，且

$$F_1^{-1}(\mathbf{U}) = \{w, F_1(w) \in I_*(G))\}$$
$$= \{w, F_1(w) \cap G \neq \varnothing\}$$

则证

定理3.4.2 若 F_1 与 F_2 是可积的同分布的集值随机变量，对于任意 $f_1 \in S_F^1(\mathbf{A}_{F1})$，存在 $f_2 \in S_{F2}^1(\mathbf{F}_2)$，使 f_1, f_2 是同分布的，且 F_1 与 F_2 独立时，f_1 与 f_2 也独立．

证明 由于 X 可分，f_1 是 $\mathbf{A}_{F1}$ 可测的，则存在映射

$$\varphi: \mathbf{P}_f(X) \to X$$

是 $\sigma(\mathbf{J}_l)$ 到 $\mathbf{B}(X)$ 可测的，且 $f_1(w) = \varphi(f_1(w))$，$(w \in \Omega)$.

令

$$f_2(w) = \varphi(f_2(w))(w \in \Omega)$$

$$\mu_i(\mathbf{U}) = P\{F_i^{-1}(\mathbf{U})\}(i = 1,2)$$

则

$$\int_\Omega \| f_2(w) \| dP = \int_{\mathbf{P}f(X)} \| \varphi(A) \| d\mu_2$$

$$= \int_{\mathbf{P}f(X)} \| \varphi(A) \| d\mu_1$$

$$= \int_\Omega \| f_1(w) \| dP < \infty$$

于是 f_2 可积，且 $\mathbf{A}_{F2}$ 可测，由于 F_1 与 F_2 同分布，则 f_1 与 f_2 同分布，从而 $d(f_1, F_1)$ 及 $d(f_2, F_2)$ 同分布．由 $f_1 \in S^1_{F_1}(\mathbf{A}_{F_1})$ 知 $d(f_1(w), F_1(w)) = 0(\text{a.e.})$，从而 $d(f_2(w), F_2(w)) = 0(\text{a.e.})$，即 $f_2(w) \in F_2(w)(\text{a.e.})$，于是 $f_2 \in S^1_{F_2}(\mathbf{A}_{F_2})$.

由定理 3.4.2，当 F_1 与 F_2 为可积同分布集值随机变量时有

$$\int_\Omega^{\mathbf{A}F_1} F_1 dP = \int_\Omega^{\mathbf{A}F_2} F_2 dp$$

定理 3.4.3 设 F 是可积的集值随机变量，则

$$\overline{\mathrm{co}} \int_\Omega F dP = \overline{\mathrm{co}} \int_\Omega^{\mathbf{A}F} F dP \qquad (3.4.3)$$

证明 由于 F 是 $\mathbf{A}_F$ 可测的，则 $\overline{\mathrm{co}}F$ 是 $\mathbf{A}_F$ 可测．于是

$$S^1_{\overline{\mathrm{co}}F}(\mathbf{A}_F) = \{E(f/\mathbf{A}_F), f \in S^1_{\overline{\mathrm{co}}F}\}$$

由于

$$S^1_{\mathrm{co}F} = \overline{\mathrm{co}} S^1_F$$

$$S^1_{\mathrm{co}F}(\mathbf{A}_F) = \overline{\mathrm{co}} S^1_F(\mathbf{A}_F)$$

则有

$$\overline{\mathrm{co}}\int_\Omega f dP = \mathrm{cl}\int_\Omega \overline{\mathrm{co}} F dP$$

$$= \mathrm{cl}\{E(E(f/\mathbf{A}_F)), f \in S^1_{\mathrm{co}F}\}$$

$$= \mathrm{cl}\{\int_\Omega f dP, f \in S^1_{\mathrm{co}F}(\mathbf{A}_F)\}$$

$$= \overline{\mathrm{co}}\int_\Omega^{\mathbf{A}F} F dP$$

［注］ 在定理3.4.3中，若F是闭凸的集值随机变量，自然有

$$\int_\Omega F dP = \int_\Omega^{\mathbf{A}F} F dP \tag{3.4.4}$$

因此对同分布的闭凸的集值随机变量F_1与F_2有

$$\int_\Omega F_1 dP = \int_\Omega^{\mathbf{A}F} F_2 dP \tag{3.4.5}$$

一般情况下，(3.4.4)与(3.4.5)未必成立．例如取$\Omega = \Omega_0 \cup \{w_1\}$，其中$P(\Omega_0) = P(\{w_1\}) = \frac{1}{2}$，$\Omega_0$是非原子的，对于$w \in \Omega_0$，定义

$$F_1(w) = F_2(w_1) = \{0,1\}$$

$$F_1(w_1) = F_2(w) = \{0\}$$

则F_1与F_2同分布．但是$\int_\Omega dP = [0,\frac{1}{2}]$，$\int_\Omega F_2 dP = \{0,\frac{1}{2}\}$.

定义3.4.2 若$\{F_n,n\geqslant 1\}$是集值随机序列，对于任意$m\neq n$，F_m与F_n同分布，称$\{F_n,n\geqslant 1\}$为同分布的集值随机序列．若$\{F_n,n\geqslant 1\}$又是独立的，称$\{F_n,n\geqslant 1\}$为独立同分布的随机序列．

定理3.4.4 若$\{F_n,n\geqslant 1\}$是可积的独立同分布的集值随机序列，则存在一列独立同分布的X值随机列$\{f_n^k,k\geqslant 1\}(n\geqslant 1)$，使得

$$F_n(w)=\mathrm{cl}\{f_n^k(w),k\geqq 1\}$$

证明 由定理3.1.1知，存在一列可积的X值随机序列$\{g_n^k,n\geqslant 1\}(k\geqslant 1)$，使得

$$F_n(w)=\mathrm{cl}\{g_n^k(w),k\geqq 1\}$$

由于F_n是$(\Omega,\mathbf{A}_{F_n})$到$(\mathbf{P}_f(X),\sigma(\mathbf{J}_l))$可测，则存在$(\mathbf{P}_f(X),\sigma(\mathbf{J}_l))$到$(X,\mathbf{B}(X))$可测的映射$\varphi_{nk}$，使$g_n^k(w)=\varphi_{nk}(F_n(w))$，$(w\in\Omega)$．则由定理3.4.2$\{\varphi_{nk}(F_m),m\geqslant 1\}$是独立同分布的$X$值的可积随机变量序列，且有

$$F_m(w)=\{\varphi_{nk}(F_m),n,k\geqq 1\}$$

则证．

定理3.4.5 设$\{F_n,n\geqslant 1\}$是可积的独立同分布的集值随机变量序列，则

$$(K.M)\ \frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n}F_i(w)\rightarrow\overline{\mathrm{co}}\int_\Omega F_1dP\ (\mathrm{a.e.})\quad(3.4.6)$$

证明 记$A=\overline{\mathrm{co}}E(F_1)=\overline{\mathrm{co}}\int_\Omega F_1dP$和

$$G_n(w)=\frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n}F_i(w)\quad(w\in\Omega,n\geqslant 1)$$

对于任意 $x \in A$ 和 $\varepsilon > 0$，利用定理 3.4.2 和定理 3.4.3 可以选择 $f_j \in S^1_{F_j}(\mathbf{A})$ $(1 \leqq j \leqq m)$，使得

$$\left\| \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} E(f_j) - x \right\| < \varepsilon$$

由于$\{F_{(k-1)m+j}, k \geqq 1\}$$(1 \leqq j \leqq m)$ 是 m 个独立同分布的集值随机序列，且 $f_j \in S^1_{F_j}(\mathbf{A}_{F_j})$ 利用定理 3.4.2 可证，存在

$$f_{(k-1)m+j} \in S^1_{F(k-1)m+j}(\mathbf{A}_{F(k-1)m+j})(k \geqq 1, 1 \leqslant j \leqslant m)$$

使得$\{f_{(k-1)m+j}, k \geqq 1\}$$(1 \leqq j \leqq m)$ 是独立同分布的. 令 $x_j = E(f_j)(1 \leqq j \leqq m)$，$n = (k-1)m + l$ $(1 \leqq l \leqq m)$，则

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(w) - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} f_{(i-1)m+j}(w) - \frac{1}{n}\sum_{j=i+1}^{m} f_{(k-1)m+j}(w) - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j \right\|$$

$$\leqq \frac{k}{n}\sum_{j=1}^{m}\left\| \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f_{(i-1)m+j}(w) - x_j \right\|$$

$$+ \frac{k}{n}\sum_{j=1}^{m}\| f_{(k-1)m+j(w)} \| + \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{m}\right)\left\| \sum_{j=1}^{m} x_j \right\|$$

对于 $1 \leqq j \leqq m$，由于$\{f_{(k-1)m+j}(w), k \geqq 1\}$ 是独立同分布的可积的随机序列，则由 X 值的强大数定律有

$$\left\| \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f_{(i-1)m+j}(w) - x_j \right\| \to 0 \ (\text{a.e. k} \to \infty)$$

因此$\frac{1}{k}\| f_{(k-1)m+j}(w) \| \to 0$ (a.e. k → ∞)，从而

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(w) - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j \right\| \to 0 \text{ (a. e. n} \to \infty)$$

由于$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \in G_n(w)$ (a. e.)，则$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j \in S\text{-}\lim\inf G_n(w)$ (a. e.)，于是有

$$A \subset s\text{-}\lim\inf G_n(w) \text{ (a. e.)} \tag{3.4.7}$$

下面连续证明

$$w\text{-}\lim_n\sup G_n(w) \subset A \text{ (a.e.)} \tag{3.4.8}$$

由于 X 可分的，存在 A^c 的可数稠密子集$\{x_j\}$，利用分离定理，存在 x_j^*，$\in X^*$，$\|x_j^*\| = 1$，使得

$$< x_j^*, x_j > - d(x_j, A) \geqq \sigma(x_j^*, A) (j \geqq 1)$$

于是 $x \in A$ 当且仅当$< x_j^*, x > \leqq \sigma(x_j^*, A) (j \geqq 1)$ 由于

$$E(\sigma(x_j^*, F_1)) = \sigma(x_j^*, E(F_1)) = \sigma(x_j^*, A) < \infty \ (j \geqq 1)$$

且$\{\sigma(x_j^*, F_n), n \geqslant 1\}$ 是独立同分布的可积随机序列，则存在 $N \in \mathbf{A}, P(N) = 0, w \notin N$ 时，对所有 $j \geqq 1$ 有

$$\sigma(x_j^*, G_n(w)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma(x_j^*, F_i(w)) \to \sigma(x_j^*, A)$$

若$x \in w\text{-}\lim\sup G_n(w) (w \notin N)$，则$(w)x_k \to x, x_k \in G_{nk}(w)$；从而

$$< x_j^*, x > = \lim_{k\to\infty} < x_j^*, x_k > \leqq \lim_{k\to\infty} \sigma(x_j^*, G_{nk}(w))$$
$$= \sigma(x_j^*, A)$$

对于所有$j \geqq 1$成立·从而$x \in A$，即证(3.4.8)，联合(3.4.7)即证

$$(K.M)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n}F_i(w)=\overline{\mathrm{co}}E(F_1)\ (\text{a.e.})$$

推论 3.4.1 设$\{F_n,n\geqq 1\}$是R^m中的紧凸集值随机序列，且可积，独立同分布，则在K收敛与δ收敛意义下均有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i(w)\to E(F_1)\ (\text{a.e.})\qquad(3.4.9)$$

证明 由定理 3.4.5 及定理 1.5.15 即证．由于$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i(w)$是紧凸集，$(\mathbf{P}_{kc}(R^m),\delta)$为完备的度量空间，则$A=E(F_1)$也是紧凸集．

推论 3.4.2 设$\{F_n,n\geqq 1\}$是R^+中的紧集值随机序列，且可积独立同分布，则在K收敛与δ收敛意义下均有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i\to \mathrm{co}\int F_1dP\ (\text{a.e.})\qquad(3.4.10)$$

证明 由于$\{F_n,n\geqslant 1\}$是可积的独立同分布的紧集值随机序列，则$\{\mathrm{co}F_n,n\geqslant 1\}$是可积的独立同分布的紧集值随机序列．依推论 3.4.1，在K收敛与δ收敛意义下均有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{co}F_i\to A=\int\mathrm{co}F_1dP\ (\text{a.e.})\qquad(3.4.11)$$

且A为紧凸集．由δ的三角不等式有

$$\delta\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i,A\Big)\leqq\delta\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{co}F_i\Big)+\delta\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{co}F_i,A\Big)\qquad(3.4.12)$$

由(3.4.11)有$\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{co}F_i,A)\to 0$ (a.e.)．由(3.4.11)存在

$N \in \mathbf{A}, P(N) = 0$，及 $Q(w)$，使

$$\| F_n(w) \| \leqq Q(w) \quad (w \notin N)$$

于是 $w \notin N$ 时有

$$\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{co}F_i) \leq \frac{mQ(w)}{n} \to 0$$

由(3.4.12)即得(3.4.10)在 δ 收敛意义下成立．由定理 1.5.10 即得(3.4.12)在 K 收敛意义下也成立．

推论 3.4.3　设 $\{F_n, n \geqq 1\}$ 是 R^m 上紧集值随机序列，且独立同分布，即

$$P_j = P\{w, F_n(w) = K_j\} (j \leqq l) \tag{3.4.13}$$

则在 K 收敛意义下有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i \to A = \sum_{j=1}^{l} P_j \mathrm{co}K_j (\quad \text{a.e.}) \tag{3.4.14}$$

证明　由推论 3.4.2 只须证．

$$\mathrm{co}\int F_1 dP = \sum_{j=1}^{l} P_j \mathrm{co}K_j \tag{3.4.15}$$

由(3.4.13)存在 Ω 的可测划分 $\{A_j, j \leqslant l\}$，使

$$F_1(w) = \sum_{j=1}^{l} \chi_{A_j}(w) \cdot K_j \tag{3.4.16}$$

且 $P(A_j) = P_j$. 于是

$$\mathrm{co}F_1(w) = \sum_{j=1}^{l} \chi_{A_j}(w) \mathrm{co}K_j \tag{3.4.17}$$

关于(3.4.17)的 Debreu 积分为

$$\mathrm{co}\int F_1 dP = \sum_{j=1}^{l} P_j \mathrm{co}K_j$$

由 R^m 中的关于紧凸集值随机变量的 Debreu 积分与 Aumman 积分等价性即证(3.4.14) 成立.

推论 3.4.4 设$\{F_n, n \geq 1\}$是 R^m 中紧集值随机变量,且独立同分布,有

$$P_j = P\{w, F_n(w) = K_j\}(j \geq 1)$$

若$\sum_{j=1}^{\infty} P_j \| K_j \| < \infty$,则在 K 收敛与 δ 收敛意义下有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i \to \sum_{j=1}^{\infty} P_j \mathrm{co} K_j (\text{a.e.})$$

证明 类似推论 3.4.3 可证.

定义 3.4.3 X 是 B 凸的空间(p 型,$1 < p \leq 2$),当且仅当对于 $L^2(\Omega;X)(L^p(\Omega;X))$ 中的任何独立的随机变量序列,只要 $E(f_n) = 0$ 和 $\sup E\| f_n \|^2 < \infty(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E(\| f_n \|^p) < \infty)$ 成立,必有

$$\frac{1}{n}\| \sum_{i=1}^{n} f_i(w) \| \to 0 \qquad (\text{a.e.}) \tag{3.4.18}$$

我们指出,X 是 B 凸的当且仅当 X 是某个 $p(p > 1)$ 型.

定理 3.4.6 假定 X 是 p 型($1 < p \leq 2$),若$\{F_n, n \geq 1\}$是独立的集值随机序列,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E(\| F_n | p) < \infty \tag{3.4.19}$$

且存在 X 中的闭集 A 满足

$$A \subset s\text{-}\lim_{n\to\infty} \inf \mathrm{cl} E[F_n, \mathbf{A}_{F_n}] \tag{3.4.20}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sigma(x^*, \mathrm{cl}E(F_n)) \leq \sigma(x^*, A)(x^* \in X^*) \tag{3.4.21}$$

则有

$$\frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n}F_i(w)\xrightarrow{K.M}\overline{\mathrm{co}}A\ (\mathrm{a.e.})\qquad(3.4.22)$$

其中

$$E[F_n,\mathbf{A}_{F_n}]=\int_{\Omega}^{\mathbf{A}_{F_n}}F_n dP$$

证明 令

$$G_n(w)=\frac{1}{n}\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n}F_i(w)\ (w\in\Omega)$$

对于任意 $x\in\overline{\mathrm{co}}A$，和 $\varepsilon>0$，可选择 $x_1,\cdots,x_m\in A$，使得

$$\left\|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j-x\right\|<\varepsilon$$

利用条件(3.4.20)，存在独立随机序列 $\{f_n,n\geq 1\}$，$f_n\in S_{F_n}(\mathbf{A}_{F_n})$，且

$$\|E(f_{(k-1)m+j})-x_j\|\to 0\ (k\to\infty,j\geq m)$$

令 $y_n=E(f_n)(n\geqslant 1)$. 如果 $n=(k-1)m+l\ (1\leqslant l\leqslant m)$，则

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(w)-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j\right\|\\
&\leqslant\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f_i(w)-y_i)\right\|+\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j\right\|\\
&\leqslant\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f_i(w)-y_i)\right\|+\frac{k}{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\|y_{(i-1)m+j}\\
&-x_j\|+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\|y_{(k-1)m+j}\|+\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{m}\right)\left\|\sum_{j=1}^{m}x_j\right\|\end{aligned}$$

$$(3.4.23)$$

由于$\{f_n, n \geqslant 1\}$是$L^p(\Omega;X)$中独立随机变量序列，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E(\| f_n \|^p) < \infty$$

则由p型X空间性质，有

$$\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (f_i(w) - y_i) \| \to 0 \text{ (a.e.)}$$

由(3.4.23)即证

$$\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(w) - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j \| \to 0 \text{ (a.e.)}$$

从而$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_j \in s\text{-}\lim\sup_n G_n(w)$ (a.e.). 于是

$$\overline{\text{co}} A \subset s\text{-}\lim\inf_n G_n(w) \text{ (a.e.)} \qquad (3.4.24)$$

下面再证

$$w\text{-}\lim\sup_n G_n(w) \subset \overline{\text{co}} A \text{ (a.e.)} \qquad (3.4.25)$$

设$\{x_j^*, j \geqq 1\}$是类似于定理 3.4.5 中相对于$\overline{\text{co}} A$取的.
则$\{\sigma(x_j^*, F_n), n \geqq 1\}$为$L^p$中独立随机变量序列，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E(|\sigma(x_j^*, F_n)|^p) < \infty$$

利用(3.4.20)及(3.4.21)可证对于任意$j \geqslant 1$有

$$E(\sigma(x_j^*, F_n)) = \sigma(x_j^*, \text{cl}E(F_n)) \to \sigma(x_j^*, A) (n \to \infty)$$

类似定理 3.4.5 可证(3.4.25)成立，联合(3.4.24)即证(3.4.22).

［注］ 如果$(\delta)\text{cl}E[F_n, \mathbf{A}_{F_n}] \to A$，则(3.4.20)与

(3.4.21) 自动满足.

§3.5 集值随机序列的中心极限定理

本节恒设 X 是有限维 Banach 空间, $(\Omega,\mathbf{A},\mu)$ 为完备的概率空间,设 $\{F_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_k[\Omega;X]$ 为独立同分布集值随机变量列,根据强大数定律, $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i,n\geqslant 1\}$ 在某种拓扑意义下几乎处处收敛到 EF_1. 本节研究 $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i,n\geqslant 1\}$ 分布的极限行为,即集值随机变量列的中心极限定理.

引理 3.5.1 设 $F:\Omega\to\mathbf{P}_k(X)$ 为集值映射,则 F 为集值随机变量当且仅当 F 是 Ω 到完备可分度量空间 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 上的随机元.

证明 "充分性"设 F 是 $\Omega\to(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 上的随机元,依定理 1.3.15 知任给开集 $G\subset X$, $I_*(G)$ 为 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 中的开集,故

$$F^{-1}(G)=\{w,F(w)\in I_*(G)\in\mathbf{A}\}$$

"必要性"设 F 是集值随机变量,依定理 1.3.16 知

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}_k(X))=\sigma(I_*(G))$$

用测度论经典方法可证 F 是 Ω 到 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 上的随机元.

定义 3.5.1 设 $\{F_n,F,n\geqslant 1\}$ 为紧集值变量列, P_n,P 分别是 F_n,F 在 $(\mathbf{P}_k(X),\delta)$ 上诱导的概率测度,如果 $\{P_n,n\geqslant 1\}$ 弱收敛到 P,则称 $\{F_n,n\geqslant 1\}$ 依分布的收敛到 F,记作

$$(\mathrm{L})F_n \to F$$

引理 3.5.2 设$\{F_n,F,n\geqslant 1\}$为紧集值随机变量序列，则

(1) 若$(\mathrm{L})F_n\to F$，则

$$\liminf_{n\to\infty}\mu\{w,F_n\cap G\neq\varnothing\}\geqslant\mu\{w,F\cap G\neq\varnothing\}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\mu\{w,d(x,F_n)<r\}\geqslant\mu\{w,d(x,F)<r\}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\mu\{w,\delta(F_n,K)<r\}\geqslant\mu\{w,\delta(F,K)<r\}$$

其中$G\subset X$为开集，$K\subset X$为紧集，$r>0$为实数．

(2) $(\mathrm{L})F_n\to F$当且仅当任给有界连续函数

$$f:(\mathbf{P}_k(X),\delta)\to R$$

$\lim\limits_{n\to\infty}Ef(F_n)=Ef(F)$成立．

证明 由于$(\mathbf{P}_k(X),\delta)$为度量空间，故该引理的证明可完全套用度量空间上测度弱收敛的经典结果．

设$\{F_n,n\geqslant 1\}\subset\mathbf{L}_k^1[\Omega;X]$，$F_1$有如下表达式

$$F_1(w)=\sum_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(w)C_j \tag{3.5.1}$$

其中$\{A_j,1\leqslant j\leqslant m\}$为$\Omega$的可测划分，$\mu(A_j)=P_j$，$C_j\in\mathbf{P}_{kc}(X)$，$1\leqslant j\leqslant m$．任给$1\leqslant j\leqslant m$，令

$$S_{jn}(w)=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ji},\qquad Y_{jn}=\frac{1}{n}S_{jn}-P_j \tag{3.5.2}$$

其中

$$\beta_{ji}=\begin{cases}1, & \text{若 } F_i=C_j\\0, & \text{否则}\end{cases} \tag{3.5.3}$$

则 $\sum_{j=1}^{m} S_{jn}(w) \equiv n$，从而知

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n} S_{jt} C_j \tag{3.5.4}$$

定义集值随机变量如下

$$R_n = \sum_{j=1}^{m} \{(P_j \chi_{(Y_{jn} \geqslant 0)} + (S_{jn}/n)\chi_{(Y_{jn} \leqslant 0)}\} C_j$$

$$V_n = \sum_{j=1}^{m} Y_{jn} \chi_{(Y_{jn} \geqslant 0)} C_j$$

$$W_n = \sum_{j=1}^{m} |Y_{jn}| \chi_{(Y_{jn} \leqslant 0)} C_j$$

(3.5.5)

则显然有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i = V_n + R_n \tag{3.5.6}$$

$$EF_n = W_n + R_n \tag{3.5.7}$$

定理3.5.1 设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$ 独立同分布，F_1 满足(3.5.1)，S_{jn}，及 Y_{jn}，β_{ji} 定义如(3.5.2)(3.5.3)，则

(1) 任给 $1 \leqslant j \leqslant m$，$\{\beta_{ji}, i \geqslant 1\}$ 独立同分布；

(2) $EY_{jn} = 0$.

证明 显然.

定理3.5.2 设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 满足定理3.5.1条件，V_n，W_n 定义如(3.5.5)，则 $n \to +\infty$ 时，

$$(\mathbf{L})\ \sqrt{n} V_n \to \sum_{j=1}^{m} Y_j \chi_{(Y_j \geqslant 0)} C_j = V$$

$$(\mathbf{L})\ \sqrt{n}W_n \to \sum_{j=1}^{m} |Y_j| \chi_{(Y_j \leqslant 0)} C_j = W$$

其中 $Y = (Y_1, \cdots, Y_m)$ 是均值为 0 的 m 维正态随机向量，并且协方差矩阵 $D = (d_{ij})_{m\times m}$ 为

$$d_{ij} = \begin{cases} -P_iP_j, & i \neq j \\ P_i(1-P_j), & i = j \end{cases}$$

证明 任给 $n \geqslant 1$，令 $\mathbf{Y}_n = (Y_{1n}, \cdots, Y_{mn})$，其中 Y_{jn} 如 (3.5.2) 式所定义，任给有界连续函数 $g:(\mathbf{P}_{kc}(X), \delta) \to R$，定义函数 $h: R^m \to R$ 如下：

$$h(y) = g(\sum_{j=1}^{k} y_i \chi_{(y_j \geqslant 0)} C_j)$$

其 $y = (y_1, \cdots, y_m) \in R^m$，则 h 为有界连续函数，依有限维随机向量的中心极限定理知 $(\mathbf{L})\ \sqrt{n}\mathbf{Y}_n \to \mathbf{Y}$，故

$$Eh(\sqrt{n}\mathbf{Y}_n) \to Eh(\mathbf{Y})$$

因此，依 V_n, W_n 的定义知

$$Eg(\sqrt{n}V_n) \to Eg(V)$$

$$Eg(\sqrt{n}W_n) \to Eg(W)$$

依引理 3.5.2(2)，定理得证.

定理 3.5.3 设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$ 满足定理 3.5.1 条件，V, W 如定理 3.5.2 所给，则

$$(\mathbf{L})\ \sqrt{n}\,\delta(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} F_i, EF_1) \to \delta(V, W)$$

证明 根据 (3.5.5) 和 (3.5.6) 两式，有

$$\sqrt{n}\,\delta(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}F_i, EF_1)$$
$$= \sqrt{n}\,\delta(V_n + R_n, W_n + R_n)$$
$$= \sqrt{n}\,\delta(V_n, W_n)$$
$$= \delta(\sqrt{n}V_n, \sqrt{n}W_n)$$

由于$\delta(\cdot,\cdot):\mathbf{P}_{kc}(X)\times\mathbf{P}_{kc}(X)\to R$是连续的，故依定理3.5.2知定理结论成立.

推论3.5.1 设$\{F_n, n\geqslant 1\}$满足定理3.5.1条件，并且F_1仅取两个值$C_1, C_2 \in \mathbf{P}_{kc}(X)$，则

$$(\mathbf{L})\ \sqrt{n}\,\delta(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}F_i, EF_1) \to \sqrt{P_1(1-P_1)}\,|Z_1|\,\delta(C_1, C_2)$$

其中Z_1为实值标准正态分布.

下面考虑非凸紧集值随机变量列的中心极限定理，设$\{F_n, n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}_k^1[\Omega, X]$独立同分布，$F_1$的表达式为

$$F_1(w) = \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_j} C_j \tag{3.5.8}$$

其中$\{A_j, 1\leqslant j\leqslant m\}$为$\Omega$的可测划分，$\mu(A_j) = P_j, C_j \in \mathbf{P}_k(X), 1\leqslant j\leqslant m$，设

$$V = \sum_{j=1} Y_j \chi_{(Y_j\geqslant 0)}\,\overline{\mathrm{co}}C_j \tag{3.5.9}$$

$$W = \sum_{j=1}^{m} |Y_j|\,\chi_{(Y_j\geqslant 0)}\,\overline{\mathrm{co}}C_j \tag{3.5.10}$$

其中$\mathbf{Y} = (Y_1, \cdots, Y_m)$如定理3.5.2所给.

引理3.5.3 设$\{C_j, 1\leqslant j\leqslant m\}\subset \mathbf{P}_k(X)$，$\|C_j\|\leqslant M$.

则

$$\delta(\sum_{j=1}^{m} C_j, \overline{\mathrm{co}}(\sum_{j=1}^{m} C_j)) \leqslant \sqrt{d} M$$

其中 d 表示 Banach 空间 X 的维数，上式右端与 m 无关．

证明　请见 Arrow，K. J. and Hahn，F. H.，< General competitive analysis > . San Francisco：Holden-Day，1971，P. 396.

定理 3.5.4　设 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_k^1[\Omega; X]$ 独立同分布，并且 F_1 满足(3.5.8)，V，W 如(3.5.9)，(3.5.10) 所定义，则

$$(\mathrm{L})\ \sqrt{n}\,\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i, \overline{\mathrm{co}} EF_1) \to \delta(V, W).$$

证明　首先，由定理 3.5.3 知

$$(\mathrm{L})\ \sqrt{n}\,\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{co}} F_i, \overline{\mathrm{co}} EF_1) \to \delta(V, W)$$

依 Hausdorff 距离 $\delta(\cdot, \cdot)$ 的三角不等式，有

$$\sqrt{n}\,\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{co}} F_i, \overline{\mathrm{co}} EF_1) - \sqrt{n}\,\delta(\frac{1}{n}\,\overline{\mathrm{co}}\sum_{i=1}^{n} F_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i)$$

$$\leqslant \sqrt{n}\,\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i, \overline{\mathrm{co}} EF_1)$$

$$\leqslant \sqrt{n}\,\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{co}} F_i, \overline{\mathrm{co}} EF_1)$$

$$\leqslant \sqrt{n}\,\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{co}} F_i, \overline{\mathrm{co}} EF_1) + \sqrt{n}\,\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i)$$

令 $M = \max(\| F_j \|, 1 \leqslant j \leqslant m)$，则依引理 3.5.3

$$\sqrt{n}\,\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i,\frac{1}{n}\,\overline{\mathrm{co}}\sum_{i=1}^{n}F_i)\leqslant\frac{1}{n}M\sqrt{d}$$

依实值随机变量列依分布收敛的定义易知

$$\sqrt{n}\,\delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i,\frac{1}{n}\,\overline{\mathrm{co}}\sum_{i=1}^{n}F_i)\leqslant\frac{1}{n}M\sqrt{d}$$

定理得证．

以上研究了集值随机变量取有限个值时的中心极限定理．下面我们利用超空间的嵌入定理（§1.2）来研究更一般情形下的中心极限定理．

引理 3.5.4 设 X 为 Banach 空间，$\mathbf{D}_0,\mathbf{D},\overline{\mathbf{D}}$ 如定理 1.2.13 及定理 1.2.14 所定义，若 X 是一维的，则 $\overline{\mathbf{D}}$ 是四维的，并且

$$e_1=<[0,1],\{0\}>,e_2=<\{1\},\{0\}>$$

$$e_3=<[-1,0],\{0\}>,e_4=<\{-1\},\{0\}>$$

是它的一个基．

证明 首先容易验证 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}\subset\overline{\mathbf{D}}$ 是线性无关的，由于 $\mathbf{D}=\mathrm{span}\mathbf{D}_0$，为证 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 为 $\overline{\mathbf{D}}$ 的一个基，仅需证明 $\mathbf{D}_0$ 中的任意元素均可用 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 线性表示，分两种情形考虑：

(1) 若 $<[a,b],\{0\}>\in\mathbf{D}_0,a\leqslant 0\leqslant b$，则显然有

$$<[a,b],\{0\}>=be_1+|a|e_2+0e_3+0e_4;$$

(2) 若 $<[a,b],\{0\}>\in\mathbf{D}_0,a\leqslant b$，取 $c\in[a,b]$，则

$$<[a-c,b-c],\{0\}>\in\mathbf{D}_0$$

满足(1)条件,因此

$$
\begin{aligned}
&< [a-c, b-c], \{0\} > \\
&= (b-c)e_1 + |a-c|e_2 + 0e_3 + ce_1
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
&< [a,b], \{0\} > \\
&= \begin{cases} (b-c)e_1 + |a-c|e_2 + ce_3, & (c \geqslant 0) \\ (b-c)e_1 + |a-c|e_2 + |c|e_4, & (c < 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

引理得证.

定理 3.5.5 设 X 是一维 Banach 空间,$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}^1_{kc}[\Omega, X]$ 独立同分布,则存在实值零均值正态随机变量 ζ,使得

$$
(\mathbf{L})\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_n \to EF_1 + \{\zeta\}
$$

证明 将 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 看做 $L^1[\Omega, \overline{\mathbf{D}}]$ 中的独立同分布随机序列,依引理 3.5.4 知 $\overline{\mathbf{D}}$ 是四维的,故存在 $\mathbf{D}$ 上正态随机向量 $E\hat{F}$, $E\hat{F} = EF_1$,使得在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上,有

$$
(\mathbf{L})\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i \to \hat{F} \tag{3.5.11}
$$

用 P_n, P 分别表示 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i$ 及 $\hat{F}$ 在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上诱导的概率测度,由于 $\mathbf{D}_0$ 为 $\overline{\mathbf{D}}$ 的闭子集,而 $P_n(\overline{\mathbf{D}} \backslash \mathbf{D}_0) = 0$,故 $P(\mathbf{D} \backslash \mathbf{D}_0) = 0$,即 $\hat{F}$ 应有如下表达式:

$$
\hat{F} = < F, \{0\} > \in \mathbf{D}_0 \qquad \text{a.e} \tag{3.5.12}
$$

其中 $F = [\eta_1, \eta_2] \in \mathbf{L}^1_{kc}[\Omega, X]$, $\eta_1 \leqslant \eta_2$ a.e. 为实值随机变量.

在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上定义实值函数 $f:\overline{\mathbf{D}}\to R$,如下

$$f(<[a,b],[c,d]>)=b+c-d-a$$

则容易验证 $f\in(\mathbf{D})^*$,因此

$$\eta_2-\eta_1=\sigma(1,F)-\sigma(-1,F)=f<(F,\{0\}>)$$

为实值正态随机变量.但由于 $\eta_2-\eta_1\geqslant 0$ a.e.,故存在常数 $\alpha\in R$,使得 $\eta_2-\eta_1=\alpha$, a.e.,令 $\xi=\delta_1-E\eta_1$,则 $E\xi=0$,且

$$F=[\eta_1,\eta_1+\alpha]=\{\xi\}+[E\eta_1,\alpha+E\eta_1]$$

因此,依(3.5.12)知 $EF_1=EF=[E\eta_1,\alpha+E\eta_1]$,从而

$$\hat{F}(<F,\{0\}>)=<EF_1+\{\xi\},\{0\}> \quad (3.5.13)$$

最后,我们证明(L) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i\to EF_1+\{\xi\}$. 任给有界连续函数 $g:(\mathbf{P}_{kc},\delta)\to R$,定义 $h:\mathbf{D}_0\to R$ 为

$$h<(C,\{0\})>=g(C)$$

则 h 为 $\mathbf{D}_0$ 上的有界连续函数,由于 $\mathbf{D}_0$ 为 $\overline{\mathbf{D}}$ 的闭子集,故依 Tietze 扩张定理可扩张为 $\overline{\mathbf{D}}$ 上的有界连续函数,仍记作 h. 根据(3.5.11),(3.5.13)可知

$$\lim_{n\to\infty}Eh(<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i,\{0\}>)=Eh(<EF_1+\{\xi\},\{0\}>)$$

即

$$\lim_{n\to\infty}Eg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i)=Eg(EF_1+\{\xi\})$$

依 $g:(\mathbf{P}_{kc}(X),\delta)\to R$ 的任意性知

$$(\mathbf{L})\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i\to EF_1+\{\xi\}$$

定理得证.

§3.6 超空间上的选择算子及其应用

在集值随机过程的研究中,一个关键的问题就是其满足某种性质的向量值选择过程的存在性,例如第二章中的可测选择,第四章集值鞅与上鞅的向量值鞅选择,第六章集值测度的向量测度选择等等. 本节将提出研究选择问题的一种新方法——选择算子法,并将其应用到集值随机过程的研究中. 为叙述简洁起见,本节恒设 X 是有限维 Banach 空间,此时 $(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$ 为局部紧可度量化空间,而 $\mathbf{B}_l(\mathbf{P}_f(X))$ 就是 $(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$ 上的 Borel σ 代数,从而可将集值随机变量看做取值于 $(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$ 上的随机元. 对于一般的可分 Banach 空间,可考虑 $\mathbf{P}_f(X)$ 上的 Wijsman 拓扑,这也是一个可分的可度量化空间,则本节的大部分结论,对于任意的可分 Banach 空间依然成立,这里将不再叙述.

定义 3.6.1 称映射 $\varphi:\mathbf{P}_f(X)\to X$ 为超空间 $(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$ 上的选择算子,若 $A\in\mathbf{P}_f(X)$,$\varphi(A)\in A$. 进一步

(1) 称 φ 是连续选择算子,若 φ 是拓扑空间 $(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$ 到 X 上的连续映射;

(2) 称 φ 是可测选择算子,若 φ 是拓扑可测空间 $(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c,\mathbf{B}_l,(\mathbf{P}_f(X)))$ 到 X 的可测映射.

定理 3.6.1 设 X 是有限维 Banach 空间,则必存在

$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$ 上的一列可测选择算子 $\{\varphi_n, n \geqslant 1\}$，使得任给 $A \in \mathbf{P}_f(X)$，有

$$A = \mathrm{cl}\{\varphi_n(A), n \geqslant 1\}$$

证明 考虑定义在可测空间 $(\mathbf{P}_f(X), \mathbf{B}_l(\mathbf{P}_f(X)))$ 上的集值映射

$$I(A) = A \qquad A \in \mathbf{P}_f(X)$$

显然 $I(\cdot)$ 关于 $\mathbf{B}_l(\mathbf{P}_f(X))$ 可测，故依定理 2.1.9，知定理成立.

定理 3.6.2 设 X 是有限维 Banach 空间，则存在连续映射

$$\varphi: (\mathbf{P}_f(X), \mathbf{J}_c) \to X$$

使得任给 $A \in \mathbf{P}_f(X)$，$\varphi(A) \in \overline{\mathrm{co}}A$. 特别地，$\varphi(\cdot)$ 是 $(\mathbf{P}_{fc}(X), \mathbf{J}_c)$ 上的连续选择算子.

证明 考虑定义在 $(\mathbf{P}_f(X), \mathbf{J}_c)$ 上的集值映射

$$I(A) = \overline{\mathrm{co}}A, A \in \mathbf{P}_f(X)$$

任给 $x \in X, \varepsilon > 0$，下面证明

$$I^{-1}(S(x,\varepsilon)) \in \mathbf{J}_c \tag{3.6.1}$$

令 $\mathbf{Y} = \{A \in \mathbf{P}_f(X), \mathrm{co}A \cap S(x,\varepsilon) \neq \varnothing\}$，显然有

$$\mathbf{Y} = \{A \in \mathbf{P}_f(X), \overline{\mathrm{co}}A \cap S(x,\varepsilon) \neq \varnothing\} \tag{3.6.2}$$

故仅需证明 $\mathbf{Y} \in \mathbf{J}_c$. 任给 $C \in \mathbf{Y}$，由于

$$\mathrm{co}C \cap S(x,\varepsilon) \neq \varnothing$$

故存在 $x_1, \cdots, x_n \in C$ 及 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0,1]$，$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \in S(x,\varepsilon)$$

令 $\varepsilon_1 = \varepsilon - \| x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \|$，依定义知

$$\mathbf{Y}_1 = I_*(S(x,\varepsilon_1)) \cap \cdots \cap I_*(S(x_n,\varepsilon_1))$$

为$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$中的开集，且$C \in \mathbf{Y}_1$为显然，任给$B \in \mathbf{Y}_1$，存在$y_1 \in B$，使得$\| x_i - y_i \| < \varepsilon_1 (1 \leqslant i \leqslant n)$，从而

$$\| \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \| < \varepsilon_1$$

因此

$$\| x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i \| < \varepsilon$$

则$\mathrm{co}B \cap S(x,\varepsilon) \neq \varnothing$，$B \in \mathbf{Y}_1$，这就是说$\mathbf{Y}_1 \subset \mathbf{Y}$，从而可得到$C$是$\mathbf{Y}$在$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$中的内点，依$C$的任意性知$\mathbf{Y} \in \mathbf{J}_c$(3.6.1)得证．根据(3.6.1)，利用[52]中定理8.1.8同样的证法可证存在连续映射φ：$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c) \to X$，使得$\varphi(A) \in I(A) = \overline{\mathrm{co}}A$. 定理后一结论为显然．

下面给出选择算子在集值随机过程中的应用，设$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$为完备的概率空间，用μ_F表示集值随机变量F在$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$上诱导的概率测度．

定义 3.6.2　设$\{F_t, t \in R^+\}$为集值随机过程，**P**是随机过程的某种性质，称X值随机过程$\{f_t, t \in R^+\}$为$\{F_t, t \in R^+\}$的**P**-选择，若$\{f_t, t \in R^+\}$具有性质**P**，且任给$t \in R^+$ $f_t \in F_t$ a.e..

定理 3.6.3　设$\{F_n, n \geqslant 1\}$为集值随机变量列，$F_n \in$

$\mu_{fc}[\Omega,X]$，(L)$F_n\to F$，则 $F\in \mathbf{P}_{fc}(X)$a. e. ，且存在$\{F_n,n\geqslant 1\}$的依分布收敛选择$\{f_n,n\geqslant 1\}$，使得(L)$f_n\to f\in F$ a. e. .

证明 容易证明 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 是$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{J}_c)$ 中的闭子集，而由于任给 $n\geqslant 1,F_n\in \mu_{fc}[\Omega,X]$，即

$$\mu\{w,F_n\in \mathbf{P}_{fc}(X)\}=1$$

故依度量空间上测度弱收敛的性质知

$$\mu\{w,F\in \mathbf{P}_{fc}(X)\}=1$$

即 $F\in P_{fc}(X)$a. e. . 设φ是定理 2. 6. 2 给出的$(\mathbf{P}_{fc}(X),\mathbf{J}_c)$ 上的连续选择算子，令

$$f=\varphi(F)\qquad f_n=\varphi(F_n)\qquad n\geqslant 1$$

则 $f_n,f,n\geqslant 1$ 可测且 $f_n\in F_n$a. e. ，$f\in F$a. e. ，用 μ_{f_n},μ_f 表示 f_n 及 f 在 X 诱导的概率测度，为证$\{f_n,n\geqslant 1\}$ 依分布收敛到 f，仅需证明任给 X 上的有界连续函数 $h:X\to R$，有

$$\lim_n\int_X h(x)d\mu_{f_n}=\int_X h(x)d\mu_f \qquad (3. 6. 3)$$

令 $H(A)=h(\varphi(A))$，则 $H(\cdot)$ 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 上的有界连续函数，于是

$$\int_X h(x)d\mu_{f_n}=\int_\Omega h(f_n)d\mu$$

$$\int_X h(x)d\mu_f=\int_\Omega h(f)d\mu$$

$$\int_{\mathbf{P}_{fc}(X)}H(A)d\mu_{F_n}=\int_\Omega H(F_n)d\mu$$

$$\int_{\mathbf{P}_{fc}(X)}H(A)d\mu_F=\int_\Omega H(F)d\mu \qquad (3. 6. 4)$$

而由于(L)$F_n \to F$,故由(3.6.4)可得

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_X h(x)d\mu_{f_n} &= \lim_n \int_\Omega h(f_n)d\mu \\
&= \lim_n \int_\Omega h(\varphi(F_n))d\mu = \lim_n \int_{\mathbf{P}_{fc}(X)} H(A)d\mu_{f_n} \\
&= \int_{\mathbf{P}_{fc}(X)} H(A)d\mu_f = \int_\Omega H(F)d\mu \\
&= \int_\Omega h(\varphi(F))d\mu = \int_\Omega h(f)d\mu \\
&= \int_\Omega h(x)d\mu_f
\end{aligned}$$

(3.6.3)得证,证毕.

定理 3.6.4 设$\{F_t, t \in R^+\}$为集值平稳过程,则必存在它的一列平稳选择$\{f_t^{(n)}, t \in R^+\}_{n\geqslant 1}$使得

$$F_t = \mathrm{cl}\{f_t^{(n)}, n \geqslant 1\}, w \in \Omega, t \in R^+ \qquad (3.6.5)$$

证明 设$\{\varphi_n, n \geqslant 1\}$为定理3.6.1给出的$\mathbf{P}_f(X)$上的可测选择算子,任给$t \in R^+, n \geqslant 1$,令

$$f_t^{(n)} = \varphi_n(F_t)$$

则依平稳随机过程的定义易证$\{f_t^{(n)}, t \in R^+\}_{n\geqslant 1}$为一列满足(3.6.5)的平稳选择.

最后讨论集值马尔可夫过程的选择问题.实际上,所谓集值马尔可夫过程(定义3.1.4)也可直接看做概率空间$(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$上以$(\mathbf{P}_f(X), \mathbf{B}_l(\mathbf{P}_f(X)))$为状态空间的马尔可夫过程,因此有关的经典结论(如马氏过程的等价条件)均可直接套用.设$\mathbf{B}_X$为X上的Borel σ代数,用$(X^N, \mathbf{B}_X^N)$表示可列个可测

空间，$(X,\mathbf{B}_X)$ 的乘积可测空间．

定理 3.6.5 设$\{F_t,t\in R^+\}$为集值马尔可夫过程，则必然对于$\mathbf{A}_t=\sigma(F_s,s\leqslant t)$，存在一列向量值的随机过程$\{f_t^{(n)},t\in R^+\}$，使得

$$F_t=\text{cl}\{f_t^{(n)},n\geqslant 1\},w\in\Omega,t\in R^+ \qquad (3.6.6)$$

且若令$x_t=(f_t^{(1)},f_t^{(2)},\cdots,f_t^{(n)},\cdots)$，则$\{x_t,t\in R^+\}$是以$(X^N,\mathbf{B}_X^N)$为状态空间，$\{\mathbf{A}_t,t\in R^+\}$为参考族的马氏过程．

证明 设$\{\varphi_n,n\geqslant 1\}$是定理3.6.1给出的$\mathbf{P}_f(X)$上的一列可测选择算子，令

$$f_t^{(n)}=\varphi_n(F_t)\quad n\geqslant 1,t\in R^+$$

则$\{f_t^{(n)},t\in R^+\}_{n\geqslant 1}$是一列向量值适应过程，且满足(3.6.6)．为证$\{x_t,t\in R^+\}$是马氏过程，仅需证明任给有界可测函数$h:(X^N,\mathbf{B}_X^N)\to R$，任给$t>s\in R^+$，有

$$E[h(x_t)/\mathbf{A}_s]=E[h(x_t)/\sigma(x_s)] \qquad (3.6.7)$$

定义映射$H:(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{B}_l(\mathbf{P}_f(X)))\to R$如下：

$$H(A)=h(\varphi_1(A),\varphi_2(A),\cdots,\varphi_n(A),\cdots),$$
$$A\in\mathbf{P}_f(X)$$

则$H(\cdot)$是$(\mathbf{P}_f(X),\mathbf{B}_l(\mathbf{P}_f(X)))$上的有界可测函数，且由$\{F_t,t\in R^+\}$是马氏过程可得．

$$E[H(F_t)/\mathbf{A}_s]=E[H(F_t)/\sigma(F_s)]\quad \text{a.e.}$$

即$E[h(x_t)/\mathbf{A}_s]=E[h(x_t)/\sigma(F_s)]$ a.e. 但由于

$$F_s=\text{cl}\{f_s^{(n)},n\geqslant 1\},w\in\Omega$$

因此$\sigma(F_s)=\sigma(f_s^{(n)},n\geqslant 1)=\sigma(x_s)$从而(3.6.7)成立，定理

得证.

[注 1]　根据上述定理，$\{F_t, t \in R^+\}$ 的统计特性由可数个向量值随机过程 $\{f_t^{(n)}, n \geqslant 1\}$ 的统计规律确定，因此我们把上述定理称作集值马氏过程的离散化定理.

[注 2]　设 Z 为正整数的有限子集，若集值马氏过程 $\{F_t, t \in R^+\}$ 在 Z 中取值，则上述定理给出的 $\{x_t, t \in R^+\}$ 就是一个以 Z^N 为状态空间的无穷质点马氏过程模型.

第四章　集值鞅及其收敛性

§4.1　集值鞅、上鞅与下鞅的定义及基本性质

设X为可分的Banach空间，对偶空间为X^*. $(\Omega,\mathbf{A},\mu)$是完备概率空间，$\{\mathbf{A}_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{A}$的完备且单调上升$\sigma$代数列，且$\mathbf{A}=\mathbf{A}_\infty=\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n$.

定义4.1.1　设$\{F_n,n\geqslant 1\}$是一随机集列，若有

$$F_n\in\mu[\Omega,\mathbf{A}_n,\mu;X],n\geqslant 1$$

则称$\{F_n,\mathbf{A}_n,n\geqslant 1\}$是适应随机集列或集值适应列．又若有$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n)\neq\varnothing,n\geqslant 1$，则称$\{F_n,\mathbf{A}_n,n\geqslant 1\}$是适应可积随机集列．

定义4.1.2　设$\{F_n,\mathbf{A}_n,n\geqslant 1\}$是适应可积随机集列，称$\{F_n,\mathbf{A}_n,n\geqslant 1\}$是集值鞅(上鞅、下鞅)，若有

$$E[F_{n+1}/\mathbf{A}]=(\subset,\supset)F_n \text{ a.e. } n\geqslant 1$$

例4.1.1　设$\{\xi_n,\mathbf{A}_n,n\geqslant 1\}$是实值非负可积适应列，若令$F_n=[0,\xi_n],n\geqslant 1$，由于

$$E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]=[0,E[\xi_{n-1}/\mathbf{A}]],n\geqslant 1$$

所以$\{F_n,\mathbf{A}_n,n\geqslant 1\}$为$R^1$上的集值鞅(上鞅、下鞅)的充要条

件是$\{\xi_n, \mathbf{A}_n; n \geqslant 1\}$是实值鞅(上鞅、下鞅).

[注 1] 设$(J, \leqslant)$是一向右定向集,$\{\mathbf{A}_t, t \in J\}$是$\mathbf{A}$的上升子$\sigma$-代数族,则可类似地定义以$J$为指标集的集值鞅(上鞅、下鞅).

[注 2] 在下面的讨论中,若不作特殊的说明,上升子σ-代数列总是取定为$\{\mathbf{A}_n, n \geqslant 1\}$,此时为叙述简便,常将其省略,如将$\{F_n, \mathbf{A}_n, n \geqslant 1\}$简记作$\{F_n, n \geqslant 1\}$.

[注 3] 若$\{F_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{P}_{fc}(X)$值适应可积随机集列,则由定理 2.4.11 知

$$E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n] = (\subset, \supset)F_n \text{ a.e. }, n \geqslant 1$$

与

$$E[F_m/\mathbf{A}_n] = (\subset, \supset)F_n \text{ a.e. }, m \geqslant n \geqslant 1$$

为等价,有反例表明对$F \in \mathbf{L}_f^1[\Omega; X]$,定理 2.4.11 不再成立,所以对$\mathbf{P}_f(X)$值适应可积随机集列,一般不再具有上述的等价性.

定理 4.1.1 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值适应列,若满足下述条件之一:

(1) $F_n \in \mathbf{L}_f^1[\Omega, \mathbf{A}_n, \mu; X]$,

(2) X^*可分且$F_n \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega, \mathbf{A}_n, \mu; X], n \geqslant 1$,

则$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值鞅(上鞅,下鞅)的充要条件是

$$\mathrm{cl}\int_A F_{n+1} d\mu = (\subset, \supset)\mathrm{cl}\int_A F_n d\mu, A \in \mathbf{A}_n, n \geqslant 1$$

证明 当定理所给的条件(1)或(2)满足时,由定理 2.4.14 或定理 2.4.15 知$E[F_{n+1}/\mathbf{A}]$由下式唯一确定,即

$$\text{cl}\int_A E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]d\mu = \text{cl}\int_A F_{n+1}d\mu,\ A \in \mathbf{A}_n$$

于是由定理 2.3.16 及其推论即知结论成立.

设$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值适应列，其对应的实值适应列$\{\sigma(\cdot, F_n), n \geqslant 1\}$，$\{d(\cdot, F_n), n \geqslant 1\}$等实值特征序列常称为$\{F_n, n \geqslant 1\}$的伴随过程，集值鞅、上(下)鞅与其伴随过程间的基本关系如下所述.

定理 4.1.2 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值适应列，

(1) 若$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值上鞅，则对任意的$x \in X$，$\{d(x, F_n), n \geqslant 1\}$是实值下鞅.

(2) 若$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值下鞅，则对任意的$x \in X$，$\{h(x, F_n), n \geqslant 1\}$是实值下鞅.

(3) 若对任给的$x \in X$，$\{d(x, F_n), n \geqslant 1\}$是实值可积上鞅，则$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值下鞅.

证明 (1) 由于$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值上鞅，即

$$E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n] \subset F_n \text{ a.e.}, n \geqslant 1$$

于是由定理 2.4.4 及定理 1.2.3 有

$$\begin{aligned} E[d(x, F_{n+1})/\mathbf{A}_n] &\geqslant d(x, E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]) \\ &\geqslant d(x, F_n) \text{ a.e.}, n \geqslant 1 \end{aligned}$$

故$\{d(x, F_n), n \geqslant 1\}$是实值下鞅.

(2) 若$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值下鞅，即

$$E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n] \supset F_n \text{ a.e.}, n \geqslant 1$$

对任给的$x \in X$，由推论 2.4.1 知

$$h(x, F_n) \leqslant h(x, E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n])$$

$$\leqslant E[h(x,F_{n+1})/\mathbf{A}_n] \text{ a.e.}, \ n \geqslant 1$$

故$\{h(x,F_n),n \geqslant 1\}$是实值下鞅.

(3) 由于$d(x,F_n) \in L^1,n \geqslant 1$,所以$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) \neq \varnothing,n \geqslant 1$,故$\{F_n,n \geqslant 1\}$是集值适应可积列,又由于

$$E[d(x,F_{n+1})/\mathbf{A}_n] \leqslant d(x,F_n) \text{ a.e. }(x), \ n \geqslant 1$$

而由定理2.4.4知

$$d(x,E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]) \leqslant d(x,F_n) \text{ a.e. }(x), n \geqslant 1$$

其中a.e.(x)表示例外集与x有关.因为X可分,设$\{x_i,i \geqslant 1\}$是X的范稠集,则存在可略集$N \in \mathbf{A}$,使有

$$d(x_i,E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]) \leqslant d(x_i,F_n), w \in \Omega \backslash N, x \in X$$

从而由定理1.2.3知$\{F_n,n \geqslant 1\}$是集值下鞅,定理证毕.

推论 4.1.1 设$\{F_n,n \geqslant 1\}$是集值适应列,

(1) 若$\{F_n,n \geqslant 1\}$是集值上鞅,则$\{|F_n|,n \geqslant 1\}$是实值下鞅;

(2) 若$\{F_n,n \geqslant 1\}$是集值下鞅,则$\{\|F_n\|,n \geqslant 1\}$是实值下鞅.

定理 4.1.3 设$\{F_n,n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_f[\Omega;X]$值鞅(上鞅、下鞅),则对任意的$x^* \in X^*$,$\{\sigma(x^*,F_n),n \geqslant 1\}$是实值可积鞅(上鞅、下鞅).

证明 由定理2.4.18即可证明结论成立.

定理 4.1.4 设X^*可分,$\{F_n,n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值适应列,则下述等价:

(1) $\{F_n,n \geqslant 1\}$是集值鞅(上鞅,下鞅);

(2) $x^* \in X^*$, $\{\sigma(x^*, F_n), n \geqslant 1\}$ 是实值鞅(上鞅，下鞅).

证明 由定理 4.1.3 知“(1)⇒(2)”成立，只要证明“(2)⇒(1)”成立即可. 设(2) 成立，D^* 是 X^* 的可列范稠集，对任意取定的 $n \geqslant 1$，存在可略集 $N \in \mathbf{A}_n$，使有

$$\sigma(x^*, E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]) = (\leqslant, \geqslant)\sigma(x^*, F_n)$$
$$w \in \Omega\backslash N, x^* \in D^*$$

于是如同定理 2.4.18 的证明可证

$$\delta(x^*, E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]) = (\leqslant, \geqslant)\delta(x^*, F_n), w \in \Omega\backslash N, x^* \in X^*$$

由分离定理即知有

$$E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n] = (\subset, \supset)F_n, w \in \Omega\backslash N$$

故$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是集值鞅(上鞅，下鞅)，(1) 成立. 证毕.

定理 4.1.5 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$，$\{G_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_f[\Omega; X]$ 值鞅，则$\{\delta(F_n, G_n), n \geqslant 1\}$ 是实值可积下鞅.

证明 这时 $\delta(F_n, G_n) \in \mathbf{L}^1[\Omega, \mathbf{A}_n, \mu; X]$ 为显然，由定理 2.4.4 有

$$\begin{aligned} &E[\delta(F_{n+1}, G_{n+1})/\mathbf{A}_n] \\ &\quad \geqslant \delta(E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n], E[G_{n+1}/\mathbf{A}_n]) \\ &\quad = \delta(F_n, G_n) \text{ a.e. } , n \geqslant 1 \end{aligned}$$

故结论成立. 证毕.

§4.2 集值鞅(上鞅、下鞅)的停止定理

对于给定的上升子 σ- 代数列$\{\mathbf{A}_n, n \geqslant 1\}$，它的停时全体.

有限停时全体和有界停时全体分别记作 $\overline{T}, T_f$ 和 T_b，并记

$$T(\sigma) = \{\tau \in T, \tau \geqslant \sigma\}, \sigma \in T$$

引理 4.2.1 设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{P}_f(X)$ 值适应列，则对任意的 $\tau \in T_f$，$F_\tau = \sum_{n\geqslant 1} F_n \chi_{(\tau=n)}$ 为 $\mathbf{A}_\tau$ 可测．

证明 对任意的 $x \in X$，因为

$$d(x, F_\tau) = \sum_{n\geqslant 1} d(x, F_n) \chi_{(\tau=n)}$$

为 $\mathbf{A}_\tau$ 可测，于是由定理 2.1.3 知 F_τ 为 $\mathbf{A}_\tau$ 可测，证毕．

引理 4.2.2 设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$ 值鞅（上鞅、下鞅），则对任意的 $\tau \in T$，有

$$E[F_\tau/\mathbf{A}_n] = (\subset, \supset) F_{\tau\wedge n}, \text{ a.e. } (n \geqslant 1) \quad (4.2.1)$$

证明 设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是鞅，对任给的 $\tau \in T$，有 $b = \sup\limits_{w} \tau(w) < \infty$，易知 $(\tau = b) \in \mathbf{A}_{b-1}$. 当 $n \geqslant b$ 时(4.2.1)式为显然，所以不妨设 $n < b$. 因为

$$F_\tau = F_b \chi_{(\tau=b)} + F_{\tau\wedge(b-1)} \chi_{(\tau<b)}$$

而 $\chi_{(\tau=b)}$ 和 $\chi_{(\tau<b)}$ 均为 $\mathbf{A}_{b-1}$ 可测，且 $F_{\tau\wedge(b-1)}$ 也为 $\mathbf{A}_{b-1}$ 可测，故由定理 2.4.6 和定理 2.4.9 有

$$E[F_\tau/\mathbf{A}_{b-1}] = E[F_b/\mathbf{A}_{b-1}]\chi_{(\tau=b)} + F_{\tau\wedge(b-1)}\chi_{(\tau<b)}$$

于是由定理 2.4.11 并依次递推即可得．

$$\begin{aligned}E[F_\tau/\mathbf{A}_n] &= E[E[F_\tau/\mathbf{A}_{b-1}]/\mathbf{A}_n] \\ &= E[E[F_b/\mathbf{A}_{b-1}]\chi_{(\tau=b)} + F_{\tau\wedge(b-1)}\chi_{(\tau<b)}/\mathbf{A}_n] \\ &= E[F_{b-1}\chi_{(\tau=b)} + F_{\tau\wedge(b-1)}\chi_{(\tau<b)}/\mathbf{A}_n] \\ &= E[F_{\tau\wedge(b-1)}/\mathbf{A}_n] = \cdots\end{aligned}$$

$$= E[F_{\tau\wedge n}/\mathbf{A}_n] = F_{\tau\wedge n} \text{ a. e.}$$

(4.2.1) 式成立，对上鞅和下鞅情形可类似地证明之，证毕.

引理 4.2.3 设 $F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，则对任意的 $\tau \in T_f$，有

$$E[F/\mathbf{A}_\tau] = \sum_{n\geqslant 1} E[F/\mathbf{A}_n]\chi_{(\tau=n)} \text{ a. e.}$$

证明 对任给的 $f \in S^1_F$，有

$$E[f/\mathbf{A}_\tau] = \sum_{n\geqslant 1} E[f/\mathbf{A}_n]\chi_{(\tau=n)} \in S^1_{\sum_{n\geqslant 1} E[F/\mathbf{A}_n]\chi_{(\tau=n)}}(\mathbf{A}_\tau)$$

为显然，由 $f \in S^1_F$ 的任意性即知有

$$S^1_{E[F/\mathbf{A}_\tau]}(A_\tau) \subset S^1_{\sum_{n\geqslant 1} E[F/\mathbf{A}_n]\chi_{(\tau=n)}}(\mathbf{A}_\tau)$$

而另一方面，对任意的 $f \in S^1_{\sum_{n\geqslant 1} E[F/\mathbf{A}_n]\chi_{(\tau=n)}}(\mathbf{A}_\tau)$，在集合 $(\tau = n)$ 上有 $f \in E[F/\mathbf{A}_n]$ a. e.，故可选取 $\{g^k_n, n \geqslant 1\} \subset S^1_F$，满足

$$E(\| E[g^k_n/\mathbf{A}_n] - f \| \chi_{(\tau=n)}) < \frac{1}{2^{(n+k)}}, n \geqslant 1, k \geqslant 1$$

令

$$g_k = \sum_{n\geqslant 1} E[g^k_n/\mathbf{A}_n]\chi_{(\tau=n)}, k \geqslant 1$$

则 $g_k \in S^1_{E[F/\mathbf{A}_\tau]}(\mathbf{A}_\tau), k \geqslant 1$，且有

$$E\| g_k - f \| < \frac{1}{2^k} \to 0, \ k \to \infty$$

这表明 $f \in S^1_{E[F/\mathbf{A}_\tau]}(\mathbf{A}_\tau)$，由 $f \in S^1_{\sum_{n\geqslant 1} E[F/\mathbf{A}_n]\chi_{(\tau=n)}}(\mathbf{A}_\tau)$，的任意性知

$$S^1_{\sum_{n\geqslant 1} E[F/\mathbf{A}_n]\chi_{(\tau=1)}}(\mathbf{A}_\tau) \subset S_{E[F/\mathbf{A}_\tau]}(\mathbf{A}_\tau)$$

由此知

$$E[F/\mathbf{A}_\tau] = \sum_{n\geqslant 1} E[F/\mathbf{A}_n]\chi_{(\tau=n)} \text{ a. e.}$$

证毕.

定理 4.2.1 (Doob 停止定理) 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$值鞅(上鞅,下鞅),则对任意的$\sigma, \tau \in T$,若$\sigma \leqslant \tau$,则有

$$E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma] = (\subset, \supset) F_\sigma \text{ a.e.}$$

证明 这时$F_\tau \in \mathbf{L}^1_{fc}(\Omega; X)$为显然,设$\sigma \leqslant k$,因为$\sigma \leqslant \tau$,于是由引理 4.2.3 和引理 4.2.2 有

$$\begin{aligned} E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma] &= \sum_{n=1}^{k} E[F_\tau/\mathbf{A}_n]\chi_{(\sigma=n)} \\ &= (\subset, \supset) \sum_{n=1}^{k} F_n \chi_{(\sigma=n)} \\ &= F_\sigma \text{ a.e.} \end{aligned}$$

故结论成立,证毕.

推论 4.2.2 (可选采样定理) 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$值鞅(上鞅,下鞅),则对任意的上升子列$\{\tau_n, n \geqslant 1\} \subset T$, $\{F_n, \mathbf{A}_{\tau_n}, n \geqslant 1\}$仍是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$值鞅(上鞅、下鞅).

如同实值和向量值情形,对于一般的非有界停止时,若没有一定的附加条件,相应的停止定理和可选采样定理不再成立.

引理 4.2.4 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$值鞅(上鞅、下鞅),对任意的$\tau \in T_f$,若有$E\|F_\tau\| < \infty$,且

$$\lim_{m \to \infty} \inf E(\|F_m\| \chi_{(\tau > m)}) = 0$$

则$E[F_\tau/\mathbf{A}_n] = (\subset, \supset) F_{\tau \wedge n}$ a.e. $, n \geqslant 1$

证明 不妨就鞅情形证明之,对任意的$m \geqslant n \geqslant 1$,由引

理 4.2.2 有

$$E[F_{\tau\wedge m}/\mathbf{A}_n] = F_{\tau\wedge n} \text{ a.e.} \quad (4.2.2)$$

设 $f \in S^1_{F\tau}$，取 $f_n \in S^1_{Fn}, n \geqslant 1$，令

$$g^m = f\chi_{(\tau\leqslant m)} + f_m\chi_{(\tau>m)}, m \geqslant n \geqslant 1$$

则 $g^m \in S^1_{F_{\tau\wedge m}}$，由(4.2.2)式知 $E[g^m/\mathbf{A}_n] \in S^1_{F_{\tau\wedge n}}$，因为

$$\lim_{m\to\infty} \inf E \| E[f/\mathbf{A}_n] - E[g_m/\mathbf{A}_n] \| \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf E \| f - g_m \|$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \inf E(\| fm\chi_{(\tau>m)} \| + \| f\chi_{(\tau>m)} \|$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} E(\| F_m \| \chi_{(\tau>m)} + \| f \| \chi_{(\tau>m)}) = 0$$

由此知 $E[f/\mathbf{A}_n] \in S^1_{F_{\tau\wedge n}}$，由 $f \in S^1_{F\tau}$ 的任意性知

$$E[F_\tau/\mathbf{A}_\tau] \subset F_{\tau\wedge n} \text{ a.e.}$$

成立．反之，对任取的 $f \in S^1_{F_{\tau\wedge n}}(\mathbf{A}_n)$，由(4.2.2)式知；存在 $g_m \in S^1_{F_{\tau\wedge m}}, m \geqslant n$，使有 $E \| E[g_m/\mathbf{A}_n] - f \| < \frac{1}{m}$．取 $g \in S^1_{F_\tau}$，并令

$$h_m = g_m \chi_{(\tau\leqslant m)} + g\chi_{(\tau>m)}, m \geqslant n$$

则 $h_m \in S^1_{F_\tau}, m \geqslant n$，且有

$$\lim_{m\to\infty} \inf E \| f - E[h_m/\mathbf{A}_n] \|$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \inf \{ E \| f - E[g_m/\mathbf{A}_n] \|$$

$$+ E(\| g_m\chi_{(\tau>m)} \| + \| g\chi_{(\tau>m)} \|) \}$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \inf E(\| F_m \| \chi_{(\tau>m)} + \| g \| \chi_{(\tau>m)}) = 0$$

这表明 $f \in S^1_{E[F_\tau/\mathbf{A}_n]}(\mathbf{A}_n)$，由 $f \in S^1_{F_{\tau\wedge n}}(\mathbf{A}_n)$ 的任意性知有

$$S^1_{F_{\tau\wedge n}}(\mathbf{A}_n) \subset S^1_{E[F/\mathbf{A}_n]}(\mathbf{A}_n)$$

由此知$E[F_\tau/\mathbf{A}_n]\supset F_{\tau\wedge n}$，a. e. ，$n\geqslant 1$成立，对上鞅和下鞅情形可类似地证明之，证毕．

定理 4.2.2 设$\{F_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}(\Omega;X)$值鞅（上鞅，下鞅），对任意的$\sigma,\tau\in T_f,\sigma\leqslant\tau$，若$E\|F_\tau\|<\infty$，且

$$\liminf_{m} E(\|F_n\|\chi_{(\tau>n)})=0$$

则

$$E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma]=(\subset,\supset)F_\sigma \text{ a. e.}$$

证明 用引理 4.2.4 代替引理 4.2.2，如同定理 4.2.1 的证明即可证明结论成立．

推论 4.2.3 设$\{F_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值鞅（上鞅，下鞅），对任意的上升停止时列$\{\tau_n,n\geqslant 1\}\subset T_f$，若$E\|F_{\tau_n}\|<\infty,n\geqslant 1$，且

$$\forall\ n\geqslant 1,\liminf_{m\to\infty} E\|F_m\|\chi_{(\tau_n>m)}=0$$

则$\{F_{\tau_n},\mathbf{A}_{\tau_n},n\geqslant 1\}$仍是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值鞅（上鞅、下鞅）．

§4.3 集值鞅的鞅选择、鞅表示与收敛性

定义 4.3.1 设$\mathbf{F}=\{F_n,n\geqslant 1\}$是适应可积随机集列，称$X$值 Bochner 可积适应列$\{f_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{F}$的鞅选择，若有

(1) $f_n\in S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n),n\geqslant 1$;

(2) $\{f_n,n\geqslant 1\}$是X值鞅．

$\mathbf{F}=\{F_n,n\geqslant 1\}$的鞅选择全体记作

$$\mathbf{MS}(\mathbf{F})\text{ 或 }\mathbf{MS}(<F_n>)$$

若$\{f_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{F}$的鞅选择，则记作，$< f_n > \in \mathbf{MS}(\mathbf{F})$或$< f_n > \in \mathbf{MS}(< F_n >)$.

例 4.3.1 设$\{f_n, n \geqslant 1\}$是X值鞅，$\{\xi_n, n \geqslant 1\}$是非负实值鞅，令

$$F_n = f_n + \xi_n \cdot \overline{S}(0,1), n \geqslant 1$$

其中$\overline{S}(0,1) = \{x \in X, \| x \| \leqslant 1\}$，则$F_n \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X], n \geqslant 1$，$\{F_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$值适应列为显然，且可以验证有，

$$E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n] = E[f_{n+1}/\mathbf{A}_n] + E[\xi_{n+1}/\mathbf{A}_n] \cdot \overline{S}(0,1)$$

$$= f_n + \xi_n \cdot \overline{S}(0,1) = F_n, \text{ a.e. }, n \geqslant 1$$

故$\{F_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$值鞅，任取$x \in \overline{S}(0,1)$，令

$$g_n = f_n + \xi_n x$$

则$g_n \in S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n), n \geqslant 1$，且$\{g_n, n \geqslant 1\}$是$X$值鞅为显然，由此知$< g_n > \in \mathbf{MS}(< F_n >)$.

定理 4.3.1 设$\mathbf{F} = \{F_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$值适应列，则下述为等价：

(1) $\mathbf{F}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$值鞅；

(2) $E[F_m/\mathbf{A}_n] = F_n$ a.e., $m > n \geqslant 1$；

(3) $S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{E[g/\mathbf{A}_n], g \in S^1_{F_{n+1}}(\mathbf{A}_{n+1})\}, n \geqslant 1$；

(4) $S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{g_n, < g_k > \in \mathbf{MS}(\mathbf{F})\}, n \geqslant (\mathbf{MS}(\mathbf{F}) \neq \varnothing)$.

证明 由定义 4.1.1 的注知(1) 等价于(2)，由推论 2.2.1 知

$$E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n] = F_n \qquad \text{a.e.}$$

成立的充分必要条件是

$$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) = S^1_{E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]}(\mathbf{A}_n)$$

但由定理 2.4.10 有

$$S^1_{E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]}(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{E[g/\mathbf{A}_n], g \in S^1_{F_{n+1}}(\mathbf{A}_{n+1})\}$$

故(1) 等价于(3) 成立，要证明(3)⇒(4)⇒(3) 成立.

"(3)⇒(4)" 设(3) 成立，对任给的 $\varepsilon > 0$ 和 $f_n \in S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n)$，存在 $f_{n+1} \in S^1_{F_{n+1}}(\mathbf{A}_{n+1})$，使有

$$E\| E[f_{n+1}/\mathbf{A}] - f_n \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$$

依次递推可得一 X 值适应 Bochner 可积列 $\{f_m, m \geqslant n\}$，使其满足上式，对任意取定的 $k \geqslant n$，考虑序列 $\{E[f_m/\mathbf{A}_k], m \geqslant k\}$，因为

$$E\| E[f_{m+1}/\mathbf{A}_k] - E[f_m/\mathbf{A}_k] \|$$

$$\leqslant E\| E[f_{m+1}/\mathbf{A}_m] - f_m \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^m}, m \geqslant k$$

所以对任意的 $b \geqslant 1$，有

$$E\| E[f_{m+b}/\mathbf{A}_k] - E[f_m/\mathbf{A}_k] \|$$

$$= E\| E[\sum_{i=1}^{b} [E[f_{m+i-1}/\mathbf{A}_{m+i}]$$

$$- f_{m+i-1}]/\mathbf{A}_k] \|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{b} E\| E[f_{m+i}/\mathbf{A}_{m+i-1}] - f_{m+i-1} \|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{b} \frac{\varepsilon}{2^{m+i-1}} < \frac{\varepsilon}{2^{m-1}} \to 0, m \to \infty$$

故$\{F[f_m/\mathbf{A}_k],m\geqslant k\}$是$L^1[\Omega;X]$中的 Cauchy 列，从而存在$g_k\in L^1[\Omega;X]$使有

$$E\|E[f_m/\mathbf{A}_k]-g_k\|\to 0,m\to\infty$$

但$\{E[f_m/\mathbf{A}_k],m\geqslant k\}\subset S^1_{F_k}(\mathbf{A}_k)$，所以$g_k\in S^1_{F_k}(\mathbf{A}_k)$. 且由于

$$\begin{aligned}
&E\|g_k-E[g_{k+1}/\mathbf{A}_k]\|\\
&\leqslant E\|g_k-E[f_m/\mathbf{A}_k]\|-E\|E[f_m/\mathbf{A}_k]\\
&-E[g_{k+1}/\mathbf{A}_k]\|\\
&\leqslant\|g_k-E[f_m/\mathbf{A}_k]\|+E\|E[f_m/\mathbf{A}_{k+1}]\\
&-g_{k+1}\|\\
&\to 0(m\to\infty)
\end{aligned}$$

所以有

$$E[g_{k+1}/\mathbf{A}_k]=g_k\ \text{a.e.},\ k\geqslant n$$

又令

$$g_k=E[g_n/\mathbf{A}_k],k<n$$

我们就得到了一个X值鞅$\{g_k,k\geqslant 1\}$，且

$$g_k\in S^1_{F_k}(\mathbf{A}_k),k\geqslant 1$$

这表明

$$<g_k>\in\mathbf{MS(F)}$$

但由于对固定的n，有

$$E\|f_n-g_n\|\leqslant\sum_{j=0}^{m-1}E\|E[f_{n+j}/\mathbf{A}_n]-E[f_{n+j+1}/\mathbf{A}_n]\|$$
$$+E\|E[f_{m+n}/\mathbf{A}_n]-g_n\|$$

而$\|E[f_{m+n}/\mathbf{A}_n]-g_n\|\to 0,m\to\infty$，所以有

$$E\| f_n - g_n \| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} E \| E[f_{n+j}/\mathbf{A}_n] - E[f_{n+j+1}/\mathbf{A}_n] \|$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} E \| f_{n+j} - E[f_{n+j+1}/\mathbf{A}_{n+j}] \|$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+j}} < \varepsilon$$

由此知

$$f_n \in \mathrm{cl}\{g_n, < g_k > \in \mathbf{MS(F)}\}$$

于是由 $f_n \in S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n)$ 的任意性知

$$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) \subset \mathrm{cl}\{g_n: < g_k > \in \mathbf{MS(F)}\}$$

而反方向的包含关系是显然的，故(4) 成立，(3)⇒(4) 得证.

"(4)⇒(3)" 设(4) 成立，则有

$$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{g_n, < g_k > \in \mathbf{MS(F)}\}$$

$$= \mathrm{cl}\{E[g_{n+1}/ \mathbf{A}_n], < g_k > \in \mathbf{MS(F)}\}$$

$$\subset \mathrm{cl}\{E[g/ \mathbf{A}_n], g \in S^1_{F_{n+1}}(\mathbf{A}_{n+1})\}$$

再证明反向的包含关系也成立，任取 $g \in S^1_{F_{n+1}}(\mathbf{A}_{n+1})$，因为(4) 成立，所以有

$$g \in \mathrm{cl}\{g_{n+1}, < g_k > \in \mathbf{MS(F)}\}$$

于是存在一列鞅选择 $< g^i_k >, i \geqslant 1$，使有

$$E\| g^i_{n+1} - g \| \to 0, i \to \infty$$

从而有

$$E\| g^i_n - E[g/\mathbf{A}_n] \| = E\| E[g^i_{n+1}/\mathbf{A}_n] - E[g/\mathbf{A}_n] \|$$

$$\leqslant E\| g^i_{n+1} - g \| \to 0, i \to \infty$$

但 $g_n^i \in S_{F_n}^1(\mathbf{A}_n)$，$i \geqslant 1$，所以上式表明 $E[g/\mathbf{A}_n] \in S_{F_n}^1(\mathbf{A}_n)$，由此知反向包含关系成立，(4)⇒(3) 得证，定理证毕．

定理 4.3.2 设 $\mathbf{F} = \{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{fc}^1[\Omega; X]$ 值鞅，则存在 $\{\langle g_n^i \rangle, i \geqslant 1\} \subset \mathbf{MS}(\mathbf{F})$，使有

$$F_n = \mathrm{cl}\{g_n^i, i \geqslant 1\} \quad \text{a.e.}, \ n \geqslant 1$$

证明 对于任意的 $n \geqslant 1$，由于 $F_n \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega; X]$，所以存在 $\{f_{ni}, i \geqslant 1\} \subset S_{F_n}^1(\mathbf{A}_n)$，使有

$$F_n = \mathrm{cl}\{f_{ni}, i \geqslant 1\}$$

对于每一个 f_n，由定理 4.3.1(4) 知存在一列鞅选择

$$\{g_k^{j(n,i)}, k \geqslant 1\}, j(n,i) \geqslant 1$$

使有

$$E \| g_n^{j(n,i)} - f_{ni} \| \to 0, j(n,i) \to \infty$$

于是有

$$F_n = \mathrm{cl}\{g_n^{j(n,i)}, j(n,i) \geqslant 1, i \geqslant 1\}, \quad \text{a.e.}$$

而 $\{\{g_k^{j(n,i)}, k \geqslant 1\}, j(n,i) \geqslant 1, i \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ 是可列个鞅选择列，将其重新排列后记作 $\{g_k^i, k \geqslant 1\}, i \geqslant 1$，即知结论成立，证毕．

定理 4.3.3 设 $\mathbf{A}$ 可分，$\mathbf{F} = \{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{fc}^1[\Omega; X]$ 值适应列，则下述命题等价：

(1) $\mathbf{F}$ 是集值鞅；

(2) 存在 $\{\langle g_n^i \rangle, i \geqslant 1\} \subset \mathbf{MS}(\mathbf{F})$ 使得

$$S_{F_n}^1(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{f_n^1, \langle g_k^i \rangle \in \mathbf{MS}(\mathbf{F}), i \geqslant 1\}$$

证明 “(1)⇒(2)”设(1) 成立，因 $\mathbf{A}$ 可分，故 $\mathbf{L}^1[\Omega; X]$

是可分的 Banach 空间，于是对任意的 $n \geqslant 1$，存在$\{f_{ni}, i \geqslant 1\} \subset S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n)$，使有 $S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{f_{ni}, i \geqslant 1\}$ 成立，仿照定理 4.3.2 的证明即可证明(1)⇒(2) 成立．

"(2)⇒(1)" 设(2) 成立，由于

$$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{g_n^i, < g_k^i > \in \mathbf{MS(F)}, i \geqslant 1\}$$

$$\subset \mathrm{cl}\{g_n, < g_k > \in \mathbf{MS(F)}\} \subset S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) n \geqslant 1$$

故由定理 4.3.1 知(1) 成立，(2)⇒(1) 成立，证毕．

定义 4.3.2　设$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值鞅，若存在 $F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，使 $F_n = E[F/\mathbf{A}_n]$，a. e. $n \geqslant 1$，则称$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是右闭集值鞅，F 是其右闭元．

定义 4.3.3　设 $< g_n > \in \mathbf{MS}(< F_n >)$，若$\{g_n, n \geqslant 1\}$ 是向量值右闭鞅，则称$\{g_n, n \geqslant 1\}$ 是 $= \mathbf{F}\{F_n, n \geqslant 1\}$ 的右闭鞅选择．**F** 的右闭鞅选择全体记作 **RMS(F)** 或 $\mathbf{RMS}(< \mathbf{F}_n >)$，若$\{g_n, n \geqslant 1\}$ 是 **F** 的右闭鞅选择，则记作 $< g_n > \in \mathbf{RMS(F)}$ 或 $< g_n > \in \mathbf{RMS}(< \mathbf{F}_n >)$.

定理 4.3.4　设 $\mathbf{F} = \{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值适应列，则下列命题等价：

(1)　**F** 是右闭集值鞅；

(2)　(2. i) $\sup\limits_n E \| F_n \| < \infty$

(2. ii) $\mathbf{RMS(F)} \neq \varnothing$ 且

$$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{g_n, < g_k > \in \mathbf{RMS(F)}\}, n \geqslant 1.$$

证明　"(1)⇒(2)" 设(1) 成立，则存在 $F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，使有

$$F_n = E[F/\mathbf{A}_n] \quad \text{a.e.}, \ n \geqslant 1 \qquad (4.3.1)$$

故 $E\|F_n\| \leqslant E\|F\| < \infty, n \geqslant 1$，由此知(2.i) 成立，又由(4.3.1) 式有

$$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) = S^1_{E[F/\mathbf{A}_n]}(\mathbf{A}_n)$$
$$= \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{A}_n], f \in S^1_F\}$$
$$\subset \mathrm{cl}\{g_n, < g_n > \in \mathbf{RMS(F)}\}$$
$$\subset S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n), n \geqslant 1$$

故(2,ii) 成立，"(1)⇒(2)" 得证．

"(2)⇒(1)"　设(2) 成立，令

$$M = \{f \in L^1[\Omega;X], < E[f/\mathbf{A}_n] > \in \mathbf{RMS(F)}\}$$

则易证 M 是 $L^1[\Omega;X]$，中的非空有界闭凸可分解的子集，于是存在 $F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，使有 $M = S^1_F$，从而有

$$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{g_n, < g_k > \in \mathbf{RMS(F)}\}$$
$$= \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{A}_n], f \in M = S^1_F\}$$
$$= S^1_{E[F/\mathbf{A}_n]}(\mathbf{A}_n), n \geqslant 1$$

由此知

$$F_n = E[F/\mathbf{A}_n] \ \text{a.e.}, n \geqslant 1$$

故(1) 成立，"(2)⇒(1)" 得证．定理证毕．

定理 4.3.5　设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是右闭集值鞅，F_∞ 是其右闭元，如果下列两条件之一满足：

(i)　$\mathbf{A}$ 是可分的；

(ii)　X^* 可分且 $F_\infty \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$.

则存在$\{g^i,i\geqslant 1\}\subset S^1_{F_\infty}$，使得

$$F_n=\mathrm{cl}\{E[g^i/\mathbf{A}_n]; i\geqslant 1\}\ \text{a.e.},\ 1\leqslant n\leqslant\infty.$$

证明 若条件(i)满足，则类似于定理4.3.3"(1)⇒(2)"的证明．下面假设条件(ii)满足，设$\{x_k^*,k\geqslant 1\}$为X^*的可数稠密子集．由于$S^1_{F_\infty}$非空，故存在$\{f^i,i\geqslant 1\}\subset S^1_{F_\infty}$，使得

$$F_\infty=\mathrm{cl}\{f^i,i\geqslant 1\}\ \text{a.e.}$$

而任给$k\geqslant 1$，易证存在$\{h^{ki},i\geqslant 1\}\subset S^1_{F_\infty}$，使得

$$<x_k^*,h^{ki}>\ \uparrow\sigma(x_k^*,F_\infty)\ \text{a.e.},i\to\infty$$

将$S^1_{F_\infty}$中的可列族$\{f^i,i\geqslant 1\}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{h^{ki},i\geqslant 1\}$重新排序，记作$\{h^i,i\geqslant 1\}$，令$U=\{\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda_m h^{im},n\geqslant 1,0\leqslant\lambda_m\leqslant 1,\lambda_m$，为有理数，$\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda_m=1\}$，则$U$仍是$S^1_{F_\infty}$的可列子集，将其重新排序，记作$\{g^i,i\geqslant 1\}$．由于任给$n\geqslant 1,F_n=E[F_\infty/\mathbf{A}_n]$ a.e.，故有

$$F_n\supset\mathrm{cl}\{E[g^i/\mathbf{A}_n],i\geqslant 1\}\quad\text{a.e.}$$

依条件期望的单调收敛定理，任给$k\geqslant 1$，

$$\begin{aligned}\sigma(x_k^*,F_n)&=E[\sigma(x_k^*,F_\infty)/\mathbf{A}_n]\\&=\sup_{i\geqslant 1}E[<x_k^*,h^{ki}>/\mathbf{A}_n]\\&\leqslant\sup_{i\geqslant 1}E[<g_k^*,h^i>/\mathbf{A}_n]\\&=\sup_{i\geqslant 1}<x_k^*,E[g^i/\mathbf{A}_n]>\end{aligned}$$

依定理2.4.17知相反包含关系成立，定理得证．

定理4.3.6 设$\mathbf{A}$可分，$\{F_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值适应列，则下述等价：

(1) $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是右闭集值鞅；

(2) 存在$\{(g_n^i, n \geqslant 1), i \geqslant 1\} \subset \mathbf{RMS}(< F_n >)$，使有

(2.i) $\sup\limits_{n \geqslant 1} \sup\limits_{i \geqslant 1} E \| g_n^i \| < \infty$，

(2.ii) $S_{F_n}^1(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{g_n^i : i \geqslant 1\}, n \geqslant 1$.

证明 运用定理 4.3.4 和定理 4.3.5 类似于定理 4.3.3 的证明可证.

定理 4.3.7 设 X 有 **RNP**，$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{fc}^1[\Omega; X]$ 值鞅，若$\{\| F_n \|, n \geqslant 1\}$ 是一致可积列，则$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是右闭集值鞅.

证明 由定理 4.3.1 知

$$S_{F_n}^1(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{g_n, < g_n > \in \mathbf{MS} < F_n >\}, n \geqslant 1$$

但对任意的$< g_k > \in \mathbf{MS}(F_n)$，$\| g_n \| \leqslant \| F_n \|$ a.e.，$n \geqslant 1$，又因 X 有 **RNP**，故$< g_k > \in \mathbf{RMS}(F_n)$，于是 $\mathbf{RMS}(F_n) \neq \varnothing$，且有

$$S_{F_n}^1(\mathbf{A}_n) = \mathrm{cl}\{g_n, < g_k > \in \mathbf{RMS}(F_n)\}, n \geqslant 1$$

由定理 4.3.4 即知 **F** 是右闭集值鞅，证毕.

定理 4.3.1 设$\{A, A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_f(X)$，若有

$$\limsup_{n \uparrow \infty} \sigma(x^*, A_n) \leqslant \sigma(x^*, A), \quad x^* \in X^*$$

则 $w\text{-}\limsup\limits_{n \uparrow \infty} A_n \subset \overline{\mathrm{co}} A$.

证明 对任取的 $x \in w\text{-}\limsup\limits_{n} A_n$，存在 $x_k \in A_{n_k}, k \geqslant 1$，使有$(w) x_k \to x, k \to \infty$. 因而有

$$< x^*, x_k > \to < x^*, x >, k \to \infty, x^* \in X^*$$

由此知

$$\begin{aligned} &< x^*, x > \\ &\leqslant \lim_n \sup \sigma(x^*, A_n) \\ &\leqslant \sigma(x^*, A) = \sigma(x^*, \overline{\mathrm{co}}A), \quad x^* \in X^* \end{aligned}$$

故 $x \in \overline{\mathrm{co}}A$. 由 $x \in w\text{-}\lim_n \sup A_n$ 的任意性即知结论成立，证毕.

引理 4.3.2 (Neveu 引理) 设$\{(x_n^i, \mathbf{A}_n, n \geqslant 1), i \geqslant 1\}$是实值下鞅可列族，若有$\sup_{n\geqslant 1} E[\sup_{i\geqslant 1}(x_n^i)^+] < \infty$，则有

(1) $i \geqslant 1, \lim_n x_n^i = x_\infty^i \in L^1[\Omega; R^1]$ a.e. 存在；

(2) $\lim_n(\sup_{i\geqslant 1} x_n^i) = x_\infty \in L^1[\Omega; R^1]$ a.e. 存在；

(3) $x_\infty = \sup_{i\geqslant 1} x_\infty^i$ a.e.

证明 对每一个$i \geqslant 1$，$\{x_n^i, n \geqslant 1\}$是下鞅，且$\{\sup_{i\geqslant 1} x_n^i, i \geqslant 1\}$仍然是下鞅，而

$$\sup_n E[\sup_i (x_n^i)^+] < \infty$$

故由实值下鞅收敛的定理知结论(1)，(2) 都成立，且

$$x_\infty = \lim_n(\sup_i x_n^i) \geqslant \sup_i(\lim_n x_n^i) = \sup x_\infty^i \text{a.e.}$$

为显然. 为证明结论(3) 成立，只要证明有

$$Ex_\infty = E(\sup_i x_\infty^i)$$

成立即可. 令

$$I(k) = \{i, 1 \leqslant i \leqslant k\}, k \geqslant 1$$

对每一个取定的$k \geqslant 1$，$\{\sup_{i\in I(k)} x_n^i, n \geqslant 1\}$仍然是下鞅，且由单调收敛定理有

$$S = \sup_n \sup_k E(\sup_{i \in I(k)} x_n^i) = \sup_n E(\sup_i x_n^i)$$

$$\leqslant \sup_n E[\sup_i (x_n^i)^+] < \infty$$

于是对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 k_ε 和 n_ε，使有

$$E(\sup_{i \in I(k)} x_n^i) \geqslant S - \varepsilon, k \geqslant k_\varepsilon, n \geqslant n_\varepsilon$$

又因为

$$x_\infty - \sup_{i \in I(k)} x_\infty^i = \lim_n (\sup_{i \geqslant 1} x_n^i - \sup_{i \in I(k)} x_n^i)$$

故由 Fatou 引理有

$$E(x_\infty - \sup_{i \in I(k)} x_\infty^i) \leqslant \lim_n \inf E(\sup_{i \geqslant 1} x_n^i - \sup_{i \in I(k)} x_n^i)$$

$$\leqslant S - (S - \varepsilon) = \varepsilon, k \geqslant k_\varepsilon$$

从而有

$$E(x_\infty - \sup_i x_\infty^i) \leqslant \varepsilon$$

成立，由 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得欲证之结论，引理得证．

定理 4.3.8 设 X^* 可分，$F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$，若令 $F_n = E[F/\mathbf{A}_n]$，$n \geqslant 1$，则$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是右闭集值鞅，F 是其右闭元，且

$$(K.M)(w)F_n \to F \text{ a.e.}$$

$$\|F_n\| \to \|F\|, \text{ a.e.} \qquad n \to \infty$$

证明 由定理 2.4.11 有

$$E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n] = E[E[F/\mathbf{A}_{n+1}]/A_n]$$

$$= E[F_{\mathbf{A}_n}] = F_n \text{ a.e.}, n \geqslant 1$$

又由定理2.4.3 知 $F_n \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega, \mathbf{A}_n, \mu; X]$，$n \geqslant 1$，故$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$ 值鞅，这时$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是右闭的，且 F 是右闭元

均显然，于是由定理 4.3.5 知存在$\{g^i, i \geqslant 1\} \subset S_F^1$，使有

$$F = \text{cl}\{g^i, i \geqslant 1\} \quad \text{a.e.}$$

$$F_n = \text{cl}\{E[g^i/\mathbf{A}_n], i \geqslant 1\} \quad \text{a.e.}, n \geqslant 1$$

由向量值右闭鞅收敛定理知

$$i \geqslant 1, \| E(g^i | \mathbf{A}_n) - g^i \| \to 0 \quad \text{a.e.}, n \to \infty$$

从而

$$F \subset s\text{-}\liminf_n F_n, \quad \text{a.e.}$$

为显然，且因为$\{\| E[g^i/\mathbf{A}_n] \|, \mathbf{A}_n, n \geqslant 1\} (i \geqslant 1)$是实值下鞅可列族，且有

$$\sup_n E[\sup_i \| E[g^i/\mathbf{A}_n] \|] \leqslant E \| F \| < \infty$$

故由 Neveu 引理可得

$$\begin{aligned} \lim_n \| F_n \| &= \lim_n \sup_i \| E[g^i/\mathbf{A}_n] \| \\ &= \sup_n \| g^i \| \\ &= \| F \| \quad \text{a.e.} \end{aligned}$$

另一方面，对任意取定的$x^* \in X^*$，有

$$\{\{E[< x^*, g^i > /\mathbf{A}_n], \mathbf{A}_n, n \geqslant 1\}, i \geqslant 1\}$$

是实值鞅可列族，且有

$$\begin{aligned} &\sup_n E[\sup_i | E[< x^*, g^i > /\mathbf{A}_n] |] \\ &\leqslant \| x^* \| \cdot E \| F \| < \infty \end{aligned}$$

又因

$$\sigma(x^*, F_n) = \sup_i < x^*, E[g^i/\mathbf{A}_n] >$$

$$= \sup_i E[\langle x^*, g^i \rangle / \mathbf{A}_n], n \geqslant 1]$$

仍由 Neveu 引理可得

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, F_n) = \lim_n [\sup_i E[\langle x^*, g^i \rangle / \mathbf{A}_n]]$$

$$= \sup_i \langle x^*, g^i \rangle = \sigma(x^*, F) \text{a. e. } (x^*)$$

其中 a. e. (x^*) 表示例外集与 x^* 有关，设 D^* 是 X^* 的可列范稠集，于是存在可略集 $N_1 \in \mathbf{A}$，使有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, F_n) = \sigma(x^*, F), w \in \Omega \backslash N_1, x^* \in D^*$$

又因为 $\sup_{n\to\infty} \| F_n \| < \infty$, a. e. , $\| F \| < \infty$ a. e. ，所以存在可略集 $N \in \mathbf{A}$，使有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, F_n) = \sigma(x^*, F), w \in \Omega \backslash N, x^* \in D^*$$

$$\| F \| < \infty, \sup_n \| F_n \| < \infty, w \in \Omega \backslash N$$

但 D^* 是 X^* 的范稠集，从而由通常的稠密性叙述知

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, F_n) = \sigma(x^*, F), w \in \Omega \backslash N, x^* \in X^*$$

这表明 $(w) F_n \to F$ a. e. , $n \to \infty$，且由引理 4. 3. 1 知

$$w\text{-}\lim \sup_n F_n \subset F, \quad \text{a. e.}$$

从而有

$$(K. M) F_n \to F \text{ a. e.}$$

定理证毕.

定理 4. 3. 9 设 X 有 **RNP** 且 X^* 可分，$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$ 值鞅，若 $\sup_n E \| F_n \| < \infty$，则存在 $F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$，使有

$$(K. M)(W) F_n \to F \text{ a. e.}$$

$$\|F_n\| \to \|F\| \text{ a.e.} \qquad n\to\infty$$

证明　由定理 4.3.2 知存在

$$\{<g_n^i>, i\geqslant 1\}\subset \mathbf{MS}(<F_n>)$$

使有

$$F_n = \mathrm{cl}\{g_n^i, i\geqslant 1\}\quad \text{a.e.},\ n\geqslant 1$$

因为

$$\sup_n E(\sup_i \|g_n^i\|) = \sup_n E\|F_n\| < \infty$$

所以由向量值鞅收敛定理知存在 $g^i\in L^1[\Omega;X], i\geqslant 1$，使有

$$i\geqslant 1,\ \|g_n^i - g^i\| \to 0 \text{ a.e.}, n\to\infty$$

令 $F=\overline{\mathrm{co}}\{g^i, i\geqslant 1\}$，易证 F 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值随机集，如同上述定理 4.3.8 的证明可证有

$$(K.M)(w)F_n \to F,\ \|F_n\| \to \|F\| \text{ a.e.},\ n\to\infty$$

成立，于是由 Fatou 引理有

$$E\|F\| \leqslant \sup_n E\|F_n\| < \infty$$

故 $F\in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，定理证毕．

引理 4.3.3　设 $\{A_n, n\geqslant 1\}\subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，$A, B\in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，若有 $A_n\subset B, n\geqslant 1$，且

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*, A_n) = \sigma(x^*, A),\ x^*\in D^*$$

其中 D^* 是 X^* 关于 Mackey 拓扑 $m(X^*, X)$ 的可列稠集，则

$$(w)A_n \to A.$$

证明　对任给的 $x^*\in X^*$，存在 $\{x_k^*, k\geqslant 1\}\subset D^*$ 在 Mackey 拓扑下收敛到 x^*，由 Mackey 拓扑在 w 紧集上的一致的拓扑知有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,A_n)=\sigma(x^*,A)$$

由 $x^*\in X^*$ 的任意性即知结论成立，证毕．

定理 4.3.10 设 $\{F_n,n\geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值鞅，$\sup_n E\|F_n\|<\infty$，若存在 $\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 值随机集 G 使有 $F_n\subset G$，a.e.，$n\geqslant 1$，则存在 $F\in\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，$F\subset G$ a.e. 使有

$$(K.M)(w)F_n\to F,\ \|F_n\|\to\|F\|\quad \text{a.e.},\ n\to\infty$$

证明 由定理 4.3.2 知存在

$$\{<g_n^i>,i\geqslant 1\}\subset \mathbf{MS}(<F_n>)$$

使有

$$F_n=\mathrm{cl}\{g_n^i,i\geqslant 1\}\quad \text{a.e.},\ n\geqslant 1$$

因为$\sup_n E\|g_n^i\|\leqslant \sup_n E\|F_n\|<\infty$，$i\geqslant 1$，且

$$\{g_n^i,n\geqslant 1\}\subset G\quad \text{a.e.},\ i\geqslant 1$$

于是由 Chatterji 的向量值鞅收敛定理知存在 $g^i\in L^1[\Omega;X]$，$i\geqslant 1$ 使有

$$i\geqslant 1,\ \|g_n^i-g^i\|\to 0\quad \text{a.e.},\ n\to\infty$$

令 $F=\overline{\mathrm{co}}\{g^i,i\geqslant 1\}$ 则 $F\subset s\text{-}\lim_n\inf F_n$ a.e.，为显然，如同定理 4.3.8 的证明可证 $\|F_n\|\to\|F\|$ a.e.，$n\to\infty$ 成立，由 Fatou 引理知 $E\|F\|<\infty$. 为证明定理之结论，只要再证明

$$(w)F_n\to F\ \text{a.e.},\ n\to\infty$$

成立即可．对任给的 $x^*\in X^*$，由 Neveu 引理知

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,F_n)=\lim_n\sup_i<x^*,g_n^i>$$

$$=\sup_i<x^*,g^i>$$

$$= \sigma(x^*, F) \text{ ,a. e. } (x^*)$$

其中的例外集与 x^* 有关，设 D^* 是 X^* 关于 Mackey 拓扑 $m(X^*, X)$ 的可列稠集，则存在可略集 N 使有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*, F_n) = \sigma(x^*, F) w \in \Omega\backslash N,\ x^* \in D^*$$

对每一个 $w \in \Omega\backslash N$ 运用引理 4.3.3 即知有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*, F_n) = \sigma(x^*, F), w \in \Omega\backslash N, x^* \in X^*$$

成立，故$(w)F_n \to F$a. e. ，$n \to \infty$，证毕．

［注］ 在定理 4.3.9 和定理 4.3.10 中，若条件

$$\sup_n E\|F_n\| < \infty$$

加强为$\{\|F_n\|, n \geqslant 1\}$一致可积，则还有

$$E[F/\mathbf{A}_n] = F_n,\quad \text{a. e. },\ n \geqslant 1$$

成立，其证明可参阅下述 § 4.4 和 § 4.5 中定理 4.4.1 和定理 4.5.2 的相应结果的证明

定理 4.3.11 设 $F \in \mathbf{L}_s^1[\Omega; X]$，$F_n = E[F/\mathbf{A}_n]$，$n \geqslant 1$，则

$$(\delta)F_n \to F,\ \text{a. e. ，且}\ \triangle(F_n, F) \to 0, n \to \infty$$

证明 由于 $F \in \mathbf{L}_s^1[\Omega; X]$，故对任给的 $\epsilon > 0$，存在 $\mathbf{L}_{fc}^1[\Omega; X]$ 值的简单函数 $H = \sum_{i=1}^{k} H_i \chi_{A_i}$，其中$\{A_i, 1 \leqslant i \leqslant k\}$是 Ω 的 $\mathbf{A}$ 可测的分划，使有

$$\triangle(F, H) < \varepsilon^2$$

再取 $\delta > 0$，使当 $P(A) < \delta$ 时有

$$\int_A 2\|H\| d\mu < \frac{\varepsilon^2}{k}$$

由于 $\mathbf{A}=\bigvee_n \mathbf{A}_n$，故存在 n_k 和 $\{B_1,\cdots,B_k\}\subset \mathbf{A}_{n_k}$，使有

$$\mu(A_i\triangle B_i)<\frac{\delta}{3k},1\leqslant i\leqslant k$$

令

$$C_1=B_1,C_i=B_i\backslash(\bigcup_{j=1}^{i-1}B_j),1<i<k$$

$$C_k=\Omega\backslash(\bigcup_{j=1}^{k-1}B_j)$$

则 $\{C_i,1\leqslant i\leqslant k\}\subset \mathbf{A}_{n_k}$，且 $\sum_{i=1}^{k}C_i=\Omega$，令

$$G=\sum_{i=1}^{k}H_i\chi_{C_i}\in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega,\mathbf{A}_{n_k},\mu;X]$$

由于 $\mu(A_i\triangle C_i)<\delta,1\leqslant i\leqslant k$，故有

$$\begin{aligned}\triangle(G,F)&\leqslant\triangle(G,H)+\triangle(H,F)\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k}\int_{A_i\triangle C_i}2\parallel H\parallel d\mu+\varepsilon^2<2\varepsilon^2\end{aligned}$$

从而当 $n\geqslant n_k$ 时有

$$\begin{aligned}\triangle(F,F_n)&\leqslant\triangle(F,G)+\triangle(G,E[F/\mathbf{A}_n])\\&=\triangle(F,G)+\triangle(E[G/\mathbf{A}_n],E[F/\mathbf{A}_n])\\&\leqslant 2\triangle(F,G)<4\varepsilon^2\end{aligned}$$

由此知$(\triangle)F_n\to F,n\to\infty$. 为证明$(\delta)F_n\to F$, a.e.，令

$$h_n=E[\delta(F,G)/\mathbf{A}_n],n\geqslant 1$$

则 $\{h_n,n\geqslant 1\}$ 是实值右闭鞅，令

$$\tau=\inf\{n\geqslant n_k,h_n>\varepsilon\},\inf\varnothing=+\infty$$

则有

$$\mu\{\sup_{n\geqslant n_k} h_n > \epsilon\} \leqslant \frac{1}{\epsilon} Eh_\tau$$

$$= \frac{1}{\epsilon}\triangle(F,G) < 2\epsilon$$

而当 $n \geqslant n_k$ 时

$$\delta(F_n,G) = \delta(E[F/\mathbf{A}_n],E[G/\mathbf{A}_n]) \leqslant E[\delta(F,G)/\mathbf{A}_n] = h_n$$

所以有

$$\mu\{\sup_{n\geqslant nk}\delta(F_n,F) > 2\epsilon\}$$

$$\leqslant \mu\{\sup_{n\geqslant nk}\delta(F_n,G) > \epsilon\} + \mu\{\delta(F,G) > \epsilon\}$$

$$\leqslant \mu\{\sup_{n\geqslant nk} h_n > \epsilon\} + 2\epsilon \leqslant 4\epsilon$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性即知$(\delta) F_n \to F$, a. e. , $n \to \infty$,定理证毕.

下述例子表明定理 4. 3. 11 中的 $F \in \mathbf{L}_s^1[\Omega;X]$ 条件一般不能减弱为 $F \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega;X]$.

例 4.3.1 设$(\Omega,\mathbf{A},P)$ 是$[0,1)$ 上的 Lebesgue 测度空间,令

$$\mathbf{A}_n = \sigma\{[(k-1)2^{-n},k2^{-n}),1 \leqslant k \leqslant 2^n\},n \geqslant 1$$

则$\{\mathbf{A}_n,n\geqslant 1\}$是上升子$\sigma$-代数列,且$\mathbf{A} = \bigvee_n \mathbf{A}_n$. 如同 § 2. 3 中的例 2. 3. 2 定义 $F \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega,\mathbf{A},\mathbf{P};l^2]$ 为

$$F = \{x \in l^2, \| x \| \leqslant 1, < x,e_n >= 0,$$
$$\text{若 } w_n = 0, n \geqslant 1\}$$

考虑右闭集值鞅$\{E[F/\mathbf{A}_n],n \geqslant 1\}$,由 $\mathbf{A}_n$ 的构造知 $E[F/\mathbf{A}_n]$ 在每一个区间$[(k-1)2^{-n},k2^{-n}),1 \leqslant k \leqslant 2^n$ 上取固定的集值,因而$E[F/\mathbf{A}_n] \in \mathbf{L}_s^1[\Omega;l^2]$. 但由例2. 3. 2知$F \notin \mathbf{L}_s^1[\Omega;l^2]$,

所以不可能有

$$\lim_{n}\triangle(E[F/\mathbf{A}_n],F)=0$$

$$\lim_{n}\delta(E[F/\mathbf{A}_n],F)=0 \text{ a. e.}$$

因而在讨论集值鞅(上鞅、下鞅)的收敛性时，人们较多地讨论其$(K.M)$、(w)等收敛性，而对(δ)收敛则较少关心.

§4.4 集值下鞅的表示与收敛性

引理4.4.1 设$\{\{x_n^i,n\geqslant 1\},i\geqslant 1\}$是实值适应可积序列族，则下述等价：

(1) $\{x_n^i,n\geqslant 1\}$是实值一致Subpramart族，即有

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}\mu\{\sup_{i\geqslant 1}[x_\sigma^i-E(x_\tau^i/\mathbf{A}_\sigma)]>\varepsilon\}=0,\varepsilon>0$$

(2) $\lim_{\tau\in T}\mu\{\sup_{i\geqslant 1}(x_\tau^i-y_\tau^i)>\varepsilon\}=0,\varepsilon>0$，其中

$$y_n^i=\operatorname*{einf}_{\tau\in T(n)}E(x_\tau^i/\mathbf{A}_n),n\geqslant 1,i\geqslant 1$$

证明 对于每一个取定的$i\geqslant 1$，已知$\{y_n^i,n\geqslant 1\}$是取值于$(-\infty,\infty)$的广义下鞅，且对任意的$\sigma\in T$，有

$$y_\sigma^i=\operatorname*{einf}_{\tau\in T(n)}E[x_\tau^i/\mathbf{A}_\sigma],i\geqslant 1$$

同时还存在$\{\tau_n^i,n\geqslant 1\}\subset T(\sigma)$，使有

$$[x_{\tau n}^i/\mathbf{A}_\sigma]\downarrow y_\sigma^i(n\to\infty),i\geqslant 1.$$

于是对任给的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}\mu\{\sup_{i\geqslant 1}[x_\sigma^i-E[x_\tau^i/\mathbf{A}_\sigma]]>\varepsilon\}$$

$$\leqslant\lim_{\sigma\in T}\mu\{\operatorname*{esup}_{\tau\in T(\sigma)}\sup_{i\geqslant 1}[x_\sigma^i-E[x_\tau^i/\mathbf{A}_\sigma]]>\varepsilon\}$$

$$= \lim_{\sigma\in T}\mu\{\sup_{i\geq 1}\operatorname{esup}_{\tau\in T(\sigma)}[x_\sigma^i - E[x_\tau^i/\mathbf{A}_\sigma]] > \varepsilon\}$$

$$= \lim_{\sigma\in T}\mu\{\sup_{i\geq 1}(x_\sigma^i - y_\sigma^i) > \varepsilon\}$$

$$= \lim_{\sigma\in T}\mu\{\sup_{i\geq 1}\sup_{n\geq 1}[x_\sigma^i - E[x_{\tau h}^i/\mathbf{A}_\sigma]] > \varepsilon\}$$

$$= \lim_{\sigma\in T}\mu\{\sup_{n\geq 1}\sup_{i\geq 1}[x_\sigma^i - E[x_{\tau h}^i/\mathbf{A}_\sigma]] > \varepsilon\}$$

$$= \lim_{\sigma\in T}\sup_{n\geq 1}\mu\{\sup_{i\geq 1}[x_\sigma^i - E[x_{\tau h}^i/\mathbf{A}_\sigma]] > \varepsilon\}$$

$$\leqslant \lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}\mu\{\sup_{i\geq 1}[x_\sigma^i - E[x_\tau^i/\mathbf{A}_\sigma]] > \varepsilon\}$$

其中最后一个不等式是由于

$$\sup_{i\geq 1}[x_\sigma^i - E[x_\sigma^i\text{-}E[x_{\tau h}^i/\mathbf{A}_\sigma]], n \to \infty$$

于是(1)与(2)等价为显然,引理证毕.

引理 4.4.2 设 $\{(x_n^i, \geqslant 1), i \geqslant 1\}$ 是实值一致 Subpramart 序列族,若 $\sup_n E(\sup_{i\geq 1}|x_n^i|) < \infty$,则

$$i \geqslant 1, \lim_n x_n^i = x^i, \lim_n y_n^i = y^i \text{ a. e.}$$

均存在,且有

$$\lim_n(\sup_{i\geq 1} x_n^i) = \sup_{i\geq 1} x^i = \lim_n(\sup_{i\geq 1} y_n^i) \text{ a. e.}$$

证明 由引理 4.4.1 有

$$\lim_{\tau\in T}\mu\{\sup_{i\geq 1}(x_\tau^i - y_\tau^i) > \varepsilon\} = 0, \varepsilon > 0$$

由此知

$$\sup_{i\geq 1} x_n^i - y_n^i| \to 0 \text{ a. e. }, n \to \infty$$

对每一个 $i \geqslant 1$,由实值下鞅收敛定理和上式知

$$\lim_n y_n^i = y^i,\ \lim_n x_n^i = x^i \in \mathbf{L}^1[\mathbf{\Omega}; R] \text{ a. e.}$$

均存在,且有

$$x^i = y^i, \text{ a.e. }, i \geqslant 1$$

因为 $y_n^i \leqslant x_n^i, n \geqslant 1, i \geqslant 1$,所以有

$$\sup_{n\geqslant 1} E(\sup_{i\geqslant 1}(y_n^i)^+) \geqslant \sup_{n\geqslant 1} E(\sup_{i\geqslant 1}(x_n^i)^+) < \infty$$

于是由 Neveu 引理(引理 4.3.2) 有

$$\lim_n (\sup_i y_n^i) = \sup_i y^i = \sup_i x^i \text{ a.e.}$$

但由于

$$|\sup_{i\geqslant 1} x_n^i - \sup_{i\geqslant 1} y_n^i| \leqslant \sup_{i\geqslant 1} |x_n^i - y_n^i| \to 0, \text{ a.e. }, n \to \infty$$

从而有

$$\lim_n (\sup_{i\geqslant 1} x_n^i) = \sup_{i\geqslant 1} x^i \text{ a.e.}$$

引理得证.

记　$\mathbf{N}^2 = \{(m,k), m \in N, k \in \mathbf{N}\}$,其中 $\mathbf{N} = \{1,2,\cdots\}$.

引理 4.4.3　设$\{F_n, n \geqslant 1\}$是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值下鞅,则存在向量值适应序列族

$$\{\{f_n^{(m,k)}, n \geqslant 1\}, (m,k) \in \mathbf{N}^2\} \subset L^1[\Omega; X]$$

使有

(a)　$n \geqslant 1, F_n = \mathrm{cl}\{f_n^{(n,k)}, k \in \mathbf{N}\}$;

$$= \mathrm{cl}\{f_n^{(n,k)}, 1 \leqslant m \leqslant n, k \in \mathbf{N}\}; \text{a.c.}$$

(b)　$E\| f_n^{(m,k)} - E[f_{n+1}^{(m,k)}/\mathbf{A}_n] \| \leqslant (2^{m+k+n+1})^{-1}$,

$$1 \leqslant m \leqslant n, k \in \mathbf{N};$$

(c)$\{\{g_n^{(m,k)}, n \geqslant 1\}, (m,k) \in \mathbf{N}^2\}$是实值一致 subpramart 序列族,其中

$$g_n^{(m,k)} = \| f_n^{(m,k)} \|, n \in N, (m,k) \in \mathbf{N}^2.$$

证明　因为$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n)\neq\varnothing,n\geqslant1$,故可选取

$$\{g_n^k,k\geqslant1\}\subset S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n),n\geqslant1$$

使有

$$F_n=\mathrm{cl}\{g_n^k,k\geqslant1\}\text{a.e.},n\geqslant1$$

记$f_n^{(n,k)}=g_n^k$,由集值下鞅定义知

$$S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n)\subset S^1_{E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]}(\mathbf{A}_n)$$
$$=\mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{A}_n],f\in S^1_{F_{n+1}}(\mathbf{A}_n)\},n\geqslant1$$

而$f_n^{(n,k)}\in S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n)$,故存在$f_{n+1}^{(n,k)}\in S^1_{F_{n+1}}(\mathbf{A}_{n+1})$,使有

$$E\|f_n^{(n,k)}-E[f_{n+1}^{(n,k)}/\mathbf{A}_n]\|\leqslant(2^{n+k+n+1})^{-1}$$

对任意的$(k,m)\in N^2$,由归纳法知可选取

$$\{f_n^{(m,k)},n\geqslant m\}\subset S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n)$$

使有

$$E\|f_n^{(m,k)}-E[f_{n+1}^{(m,k)}/\mathbf{A}_n]\|\leqslant(2^{m+k+n+1})^{-1}$$

故欲证之结论(a)、(b)均已成立.对任意的$(m,k)\in N^2$,易知$(f_n^{(m,k)},n\geqslant m)$是向量值拟鞅,即

$$\sum_{n=m}^{\infty}E\|f_n^{(m,k)}-E[f_{n+1}^{(m,k)}/\mathbf{A}_n]\|<\infty$$

对$1\leqslant n\leqslant m$,定义

$$f_n^{(m,k)}=E[f_m^{(m,k)}/\mathbf{A}_n]$$

令

$$g_n^{(m,k)}=\|f_n^{(m,k)}\|,n\in N,(m,k)\in N^2$$

对任意的$j\in N,\sigma\in T(j),\tau\in T(\sigma)$,记$b=\max\limits_{w\in\Omega}\tau(w)$,易知

$$(\tau = b) \in \mathbf{A}_{b-1}$$

$$E \| f_n^{(m,k)} - E[f_\tau^{(m,k)}/\mathbf{A}_n] \| \chi_{(\sigma=n)}$$

$$= E \| f_n^{(m,k)} - E[f_{\tau\wedge(b-1)}^{(m,k)} - (f_{b-1}^{(m,k)} - f_b^{(m,k)})$$

$$\chi_{(\tau=b)}/\mathbf{A}_n]\chi_{(\sigma=n)}$$

$$\leqslant E \| f_n^{(m,k)} - E[f_{\tau\wedge(b-1)}^{(m,k)}/\mathbf{A}_n] \| \chi_{(\sigma=n)}$$

$$+ E \| f_{b-1}^{(m,k)} - E[f_b^{(m,k)}/\mathbf{A}_{b-1}] \| \chi_{(\sigma=n)}$$

$$\leqslant \cdots \leqslant \sum_{i\geqslant n} E \| f_i^{(m,k)} - E[f_{i+1}^{(m,k)}/\mathbf{A}_i] \| \chi_{(\sigma=n)}$$

从而有

$$E \| f_\sigma^{(m,k)} - E[f_\tau^{(m,k)}/\mathbf{A}_\sigma] \|$$

$$= \sum_{n\geqslant j} E \| f_n^{(m,k)} - E[f_\tau^{(m,k)}/\mathbf{A}_n] \| \chi_{(\sigma=n)}$$

$$\leqslant \sum_{n\geqslant j} \sum_{i\geqslant n} E \| f_i^{(m,k)} - E[f_{i+1}^{(m,k)}/\mathbf{A}_i] \| \chi_{(\sigma=n)}$$

$$\leqslant \sum_{i\geqslant j} E \| f_i^{(m,k)} - E[f_{i+1}^{(m,k)}/\mathbf{A}_i] \|$$

于是对任给的 $\epsilon > 0$，有

$$\mu\{ \sup_{(m,k)\in N^2} (g_\sigma^{(m,k)} - E[g_\tau^{(m,k)}/\mathbf{A}_\sigma]) > \epsilon\}$$

$$\leqslant \mu\{ \sup_{(m,k)\in N^2} \| f_\sigma^{(m,k)} - E[f_\tau^{(m,k)}/\mathbf{A}_\sigma] \| > \epsilon\}$$

$$\leqslant \frac{1}{\epsilon} \sum_{(m,k)\in N^2} E \| f_\sigma^{(m,k)} - E[f_\tau^{(m,k)}/\mathbf{A}_\sigma] \|$$

$$\leqslant \frac{1}{\epsilon} \sum_{(m,k)\in N^2} \sum_{i=j}^{\infty} E \| f_i^{(m,k)} - E[f_{i+1}^{(m,k)}/\mathbf{A}_i] \|$$

$$\leqslant \frac{1}{\epsilon} \sum_{(m,k)\in N^2} \sum_{i=j}^{\infty} (2^{m+k+i+1})^{-1} \to 0, j \to \infty$$

由此知$\{\{g_n^{(m,k)}, n \geqslant 1\}, (m,k) \in N^2\}$是实值一致 subpramart 可列族，结论(c) 成立．引理证毕．

定理 4.4.1 设 X 有 **RNP** 且 X^* 可分，$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{fc}^1[\Omega;X]$ 值下鞅，若$\sup\limits_n E\|F_n\| < \infty$，则存在 $F \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega;X]$，使有

$$\left.\begin{array}{l}(K.M)(w)F_n \to F \text{ a.e.} \\ \|F_n\| \to \|F\| \text{ a.e.}\end{array}\right. \quad n \to \infty$$

又若$\{\|F_n\|, n \geqslant 1\}$一致可积，则

$$F_n \subset E[F/\mathbf{A}_n], \text{ a.e.}, n \geqslant 1$$

证明 设向量值拟鞅序列族$\{\{f_n^{(m,k)}, n \geqslant 1\}, (m,k) \in \mathbf{N}^2\}$满足引理 4.4.3 中的(a)，(b) 和(c)，因为 X 有 **RNP**，且

$$\sup_{n\to\infty} E(\sup_{(m,k)\in N^2} \|f_n^{(m,k)}\|) = \sup_n \|F_n\| < \infty \quad (4.4.1)$$

而拟鞅是一致 Amart，于是由向量值一致 Amart 的收敛定理知存在$\{f^{(m,k)}, (m,k) \in N^2\} \subset L^1[\Omega;X]$，使有

$$(m,k) \in N^2, \|f_n^{(m,k)} - f^{(m,k)}\| \to 0, \text{ a.e.}, n \to +\infty$$

令

$$F = \overline{\text{co}}\{f^{(m,k)}, (m,k) \in N^2\}$$

则$F \subset s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} F_n$，a.e. 为显然．易知$F$是$\mathbf{P}_{fc}(X)$值随机集，因为

$$\{\{\|f_n^{(m,k)}, n \geqslant 1\|\}, (m,k) \in N^2\}$$

是一致 subpramart 可列族，且有(4.4.1) 式成立．从而由引理

4.4.2 有

$$\lim_n \| F_n \| = \lim_{n\to 1}(\sup_{(m,k)\in N^2} \| f_n^{(m,k)} \|)$$

$$= \sup_{(m,k)\in N^2} \lim_{n\to\infty} \| f_n^{(m,k)} \|$$

$$= \sup_{(m,k)\in N^2} \| f_\infty^{(m,k)} \| = \| F \| \text{ a.e.}$$

再由 Fatou 引理知 $E \| F \| < \infty$，故 $F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$.

对每一个取定的 $x^* \in X^*$，$\{\sigma(x^*, F_n), n \geq 1\}$ 是实值下鞅，令

$$x_n^{(m,k)} = < x^*, f_n^{(m,k)} >, n \geq m, (m,k) \in N^2$$

因为

$$|x_n^{(m,k)} - E[x_\tau^{(m,k)}/\mathbf{A}_\sigma]| \leqslant \| x^* \| \cdot \| f_\sigma^{(m,k)} - E[f_\tau^{(m,k)}/\mathbf{A}_\sigma] \|$$

于是由引理 4.4.3 的证明有

$$\lim_{\sigma\in T} \sup_{\tau\in T(\sigma)} \mu\{ \sup_{(m,k)\in N^2} |x_\sigma^{(m,k)} - E[x_\sigma^{(m,k)}/\mathbf{A}_\sigma] > \varepsilon\} = 0, \varepsilon > 0$$

故 $\{\{x_n^{(m,k)}, n \geq 1\}, (m,k) \in N^2\}$ 是实值一致 subpramart 可列族，且有

$$\sup_{n\to\infty} E(\sup_{(m,k)\in N^2} |x_n^{(m,k)}|)$$

$$\leqslant \| x^* \| \sup_{n\to\infty} E(\sup_{(m,k)\in N^2} \| f_n^{(m,k)} \|)$$

$$= \| x^* \| \sup_{n\to\infty} E \| F_n \| < \infty$$

仍由引理 4.4.2 知有

$$\lim_n \sigma(x^*, F_n) = \lim \sup_{(m,k)\in N^2} x_n^{(m,k)}$$

$$= \sup_{(m,k)\in N^2} \lim_n x_n^{(m,k)}$$

$$= \sup_{(m,k)\in N^2} < x^*, f^{(m,k)} >$$

$$= \sigma(x^*, F), \text{ a. e. } (x^*)$$

其中的例外集与 x^* 有关，因为 X^* 可分，且 $\sup_{n\to\infty} \| F_n \| < \infty$, a. e.，于是由通常的稠密性叙述知存在可略集 N，使有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, F_n) = \sigma(x^*, F), w \in \Omega\backslash N, x^* \in X^*$$

由此知

$$(W)F_n \to F \text{ a. e. }, n \to \infty \text{ 且 } w\text{-} \lim_{n\to\infty} \sup F_n \subset F \text{ a. e.}$$

从而有

$$(K.M)F_n \to F \quad \text{a. e. }, n \to \infty$$

若 $\{\| F_n \|, n \geqslant 1\}$ 一致可积，则对任取的 $x^* \in X^*$，$\{\sigma(x^*, F_n), n \geqslant 1\}$ 是实值一致可积下鞅，于是由一致可积下鞅的性质有

$$\sigma(x^*, E[F/\mathbf{A}_n]) = E[\sigma(x^*, F)/\mathbf{A}_n]$$

$$= L^1 - \lim_{m\uparrow\infty} E[\sigma(x^*, F_m)/\mathbf{A}_n]$$

$$\geqslant \sigma(x^*, F_n), \text{a. e. } (x^*), n \geqslant 1$$

其中的例外集与 x^* 有关，因为

$$\max(\| E[F/\mathbf{A}_n] \|, \| F_n \|) < \infty \text{ a. e. }, n \geqslant 1$$

由通常的稠密性叙述知存在可略集 N，使有

$$\sigma(x^*, E[F/\mathbf{A}_n]) \geqslant \sigma(x^*, F_n), w \in \Omega\backslash N, x^* \in X^*$$

由此知

$$E[F/\mathbf{A}_n] \supset F_n, \text{a. e.}, n \geqslant 1$$

定理证毕.

［注］ 在定理4.4.1中，若条件"X有RNP且X^*可分"，改为"存在$G(w) \in \mathbf{P}_{wkc}(X), w \in \Omega$，使有$F_n \subset G$ a. e. ,$n \geqslant 1$"，则同样可证明定理的结论成立.

§4.5 集值上鞅的收敛性

引理4.5.1 设$\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{wkc}(X)$，且$A_1 \supset A_2, \cdots$，则

$$A = \bigcap_{n \geqslant 1} A_n \in \mathbf{P}_{wkc}(w) \text{ 且} (x) A_n \to A, n \to \infty$$

证明 $A \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$为显然，且

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(x^*, A_n) \geqslant \sigma(x^*, A), x^* \in X^*$$

亦为显然，这时可证等号成立. 反证之，若结论不成立，则存在$x^* \in X^*$使有

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(x^*, A_n) > \sigma(x^*, A)$$

由w紧性知存在$y_n \in A_n, n \geqslant 1$，满足

$$\{< x^*, y_n >\} = \sigma(x^*, A_n), n \geqslant 1$$

因为$(y_n, n \geqslant 1) \supset A_1 \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，故存在子列$\{y_{nk}, k \geqslant 1\}$和$y \in A_1$使有$(w) y_{nk} \to y, k \to \infty$. 由$A_n$的单调性和$w$紧性知$y \in A_n, n \geqslant 1$，从而$y \in A$. 另一方面，又有

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(x^*, A_n) = \lim_{n \to \infty} < x^*, y_{nk} >$$

$$= < x^*, y > > \sigma(x^*, A)$$

这就有了矛盾，故结论成立，引理得证.

若无特殊的说明，在这一节中设 D^* 是 X^* 关于 Mackey 拓扑 $m(X^*,X)$ 的可列稠集. 又记 $D_1^* = D^* \cap U^*$，其中

$$U^* = \{x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1\}$$

引理 4.5.2 设 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{wkc}(X)$，若有

(1) 存在 $B \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，使有 $A_n \subset B, n \geqslant 1$，

(2) 任给 $x^* \in D^*$，$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(x^*, A_n)$ 存在.

则存在 $A \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，使有 $(w) A_n \to A, n \to \infty$.

证明 令

$$B_n = \overline{\mathrm{co}}(\bigcup_{m\geqslant n} A_m), n \geqslant 1$$

则 $B_n \subset B, B_n \in \mathbf{P}_{wkc}(X), n \geqslant 1$ 且 $B_n \downarrow (n \uparrow)$ 均为显然，令

$$A = \bigcap_{n\geqslant 1} B_n \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$$

由引理 4.5.1 有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, B_n) = \sigma(x^*, A), x^* \in X^*$$

但是

$$\sigma(x^*, B_n) = \sigma(x^*, \mathrm{co}(\bigcup_{m\geqslant n} A_m))$$

$$= \sup_{m\geqslant n} \sigma(x^*, A_m), n \geqslant 1$$

故有

$$\sigma(x^*, A) = \lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, B_n)$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sigma(x^*, A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, A_n), x^* \in D^*$$

从而由 Mackey 拓扑在弱紧集上的一致性有

$$\sigma(x^*,A)=\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,A_n),x^*\in X^*$$

故结论成立，引理得证．

引理4.5.3 设G和$\{F_n,n\geqslant 1\}$都是$\mathbf{P}_{wkc}(X)$值随机集，若有

(i)$F_n\subset F$,a.e.,$n\geqslant 1$;

(ii)$x^*\in D^*$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(x^*,F_n)$a.e. 存在

则有

(a) 存在$\mathbf{P}_{wkc}(X)$值随机集F使有

$$(w)F_n\to F,\text{a.e.},n\to\infty;$$

(b) 又若$\liminf\limits_{n\to\infty}E\|F_n\|<\infty$,则$E\|F\|<\infty$.

证明 因为D^*可列，所以存在可略集N，使有

$$\lim_n\sigma(x^*,F_n)\text{ 存在},w\in\Omega\backslash N,x^*\in D^*$$

对每一个$w\in\Omega\backslash N$，运用引理4.5.2即知存在$F(w)\in\mathbf{P}_{wkc}(X)$，使有

$$\sigma(x^*,F)=\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,F_n),w\in\Omega\backslash N,x^*\in X^*$$

又由 Minimax 定理有

$$d(x,F)=\sup_{x^*\in D_1^*}[<x^*,x>-\sigma(x^*,F)],x\in X$$

故对任意的$x\in X$,$d(x,F)$都是实值可测函数，从而由定理2.1.6知F是随机集，结论(a)得证．

若$\liminf\limits_{n\to\infty}E\|F_n\|<\infty$，因为

$$\|F_n\|=\sup_{x^*\in D_1^*}\sigma(x^*,F_n)$$

于是有

$$\liminf_{n\to\infty}\|F_n\| \geqslant \liminf_{n\to\infty}\sigma(x^*,F_n) = \lim_n \sigma(x^*,F_n)$$
$$= \sigma(x^*,F) w \in \Omega\backslash N, x^* \in D^*$$

由此知

$$\liminf_n \|F_n\| \geqslant \sup_{x^*\in D_1^*} \sigma(x^*,F) = \|F\|, w \in \Omega\backslash N$$

故由 Fatou 引理即得

$$E\|F\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} E\|F_n\| < \infty$$

结论(b) 得证，引理证毕．

［注］ 上述引理结论(b) 中的条件“$\liminf\limits_{n\to\infty} E\|F_n\| < \infty$”若减弱为“$\sup\limits_{n\to\infty} E\|F_n\| < \infty$”，则可类似的证明有 $E|F| < \infty$，即 $S_F^1 \neq \varnothing$，这时要用到下述等式：

$$A = d(0,A) = \sup_{x^*\in D_1^*}[-\sigma(x^*,A)], A \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$$

引理 4.5.4 设$\{A, A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，若有

(i) $d(x,A) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x,A_n), x \in X$

(ii) $\sigma(x^*,A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(x^*,A_n), x_* \in X^*$

则$(K,M)A_n \to A$.

证明 这时有

$$x \in A, \lim_{n\to\infty} d(x,A_n) = d(x,A) = 0$$

这表明 $A \subset s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$，又由引理 4.3.1 有

$$s\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$$

成立，从而有$(K \cdot M)A_n \to A$，引理得证．

定理 4.5.1 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega;X]$ 值上鞅，若有

(i) $\sup_n E[\sigma(x^*,F_n)] < \infty, x^* \in D^*$,

(ii) 存在$G(w)\in \mathbf{P}_{wkc}(X)$a.e. 使有$F_n \subset G$ a.e.，$n \geqslant 1$，

则有

(a) 存在$\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 随机集F,使有$(w)F_n \to F$ a.e.，$n \to \infty$，

(b) 若有$\sup_n E\|F_n\| < \infty$,则有$(K\cdot M)F_n \to F$ a.e.，$n \to \infty$,且有$E\|F\| < \infty$.

证明 (a) 对任意取定的$x^* \in D^*$,$\{\sigma(x^*,F_n),n \geqslant 1\}$是实值上鞅，在条件(i)下由实值上鞅收敛定理知$\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,F_n)$a.e. 存在，从而由条件(ii)和引理4.5.3(a)知结论(a)成立.

(b) 设D是X的可列范稠集，对任取的$x \in D$,因为有

$$d(x,F_n) = \sup_{x^* \in D_1^*}[<x^*,x> - \sigma(x^*,F)]$$

$$d(x,F) = \sup_{x^* \in D_1^*}[<x^*,x> - \sigma(x^*,F)]$$

$$\sup_n d(x,F_n) \leqslant \|X\| + \sup_n E\|F_n\| < \infty$$

于是对下鞅可列族，

$$\{\{<x^*,x> - \sigma(x^*,F_n),n \geqslant 1\},x^* \in D_1^*\}$$

应用Neveu引理即知存在可略集N_x,使有

$$d(x,F) = \lim_n d(x,F_n),w \in \Omega\backslash N_x$$

令$N = \bigcup_{x\in D} N_x$,则N仍是可略集，这时有

$$d(x,F) = \lim_n d(x,F_n),w \in \Omega\backslash N,x \in D$$

对每一个 $w \in \Omega \backslash N$，由条件(ii)知 $\{d(\cdot, F_n), n \geqslant 1\}$ 是等度连续的，于是由 D 在 X 中的稠密性可得

$$d(x,F) = \lim_n d(x,F_n), w \in \Omega\backslash N, x \in X$$

从而由已证之结论(a)和引理 4.5.4 知

$$(K.M)F_n \to F \text{ a.e.}, \ n \to \infty$$

且由引理 4.5.3(b) 有 $E\|F\| < \infty$，结论(b)得证，定理证毕．

引理4.5.5 设 $\xi \in L^1(\Omega; R^1)$，则对于任一子 σ 代数 $\mathbf{F} \subset \mathbf{A}_n$，和任意的 $x \in X$，有

$$E[\overline{S}(x,\xi)/\mathbf{F}] = \overline{S}(x, E[\xi/\mathbf{F}]) \text{ a.e.}$$

证明 对任给的 $x \in X$，令 $F(w) = \overline{S}(x,1), w \in \Omega$，则

$$\overline{S}(x,\xi) = \xi \cdot F$$

于是如同定理 2.4.9 的证明可证有

$$\begin{aligned} E[\overline{S}(x,\xi)/\mathbf{F}] &= E[\xi F/\mathbf{F}] \\ &= E[\xi/\mathbf{F}] \cdot F \\ &= \overline{S}(x, E[\xi/\mathbf{F}]) \text{ a.e.} \end{aligned}$$

引理得证．

引理4.5.6 假设 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset 2^X$，$\{a_k, k \geqslant 1\} \subset R^+$，且 $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = +\infty$．若对每一个 $k \geqslant 1$，存在 $A^k \in \mathbf{P}_f(X)$，使有

$$(K.M)A_n \cap \overline{S}(0, a_k) \to A^k$$

则 $A = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} A^k \in \mathbf{L}_f(X)$，且

$$(K.M)A_n \to A.$$

证明 对任取的 $x \in A$，存在 A^m 使得 $x \in A^m$，而

$$A^m \subset s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf(A_n \cap \overline{S}(0,a_m)) \subset s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf A_n$$

为显然，由 $x \in A$ 的任意性即知有

$$A \subset s\text{-}\lim_n \inf A_{n\to\infty}$$

成立，再证明 $w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n \subset A$，设 $x \in w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n$，则存在 $x_i \in A_{ni}, i \geq 1$，使有 $(w)x_i \to x, i \to \infty$。因为每一个 w 收敛点列是有界的，所以存在 $m \geq 1$，使有 $\| x_i \| \leqslant a_m, i \geq 1$，由此知

$$x \in w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup(A_n \cap \overline{S}(0,a_m)) \subset A^m \subset A$$

由 $x \in w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n$ 的任意性知 $w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup A_n \subset A$ 成立，

故
$$(K.M)A_n \to A, n \to \infty$$

而由推论 1.5.1 知 $A \in \mathbf{P}_f(x)$，引理证毕．

下述定理给出了无界集值上鞅的收敛性．

定理 4.5.2 设 $\{F_n, n \geq 1\}$ 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值上鞅，若有

(i) $\sup_n Ed(0,F_n) < \infty$；

(ii) 存在 $G(w) \in \mathbf{P}_{lwk}(X)$ a.e.，使 $F_n \in G$ a.e.，$n \geq 1$，

则存在 $\mathbf{P}_{lwk}(X)$ 值随机集 F，使得 $S_F^1 \neq \emptyset$，且

$$(K.M)F_n \to F \text{a.e.}, n \to \infty$$

证明 令

$$\xi_n^k = d(0,F_n) + k, w \in \Omega, k \geq 1, n \geq 1$$

对每一个取定的 $k \geq 1$，$\{\xi_n^k, n \geq 1\}$ 是实值正下鞅，由下鞅的 Krickeberg 分解有

$$\xi_n^k = \eta_n^k - \xi_n^k, \quad n \geq 1$$

其中 $\{\eta_n^k, n \geq 1\}$ 是正可积鞅，$\{\xi_n^k, n \geq 1\}$ 是正可积上鞅．令

$$F_n^k = F_n \cap \overline{S}(0,\eta_n^k), n \geqslant 1$$

因为$\sup\limits_n E\eta_n^k = E\eta_1^k < \infty$，由鞅收敛定理知

$$\eta^k = \sup_n \eta_n^k < \infty \text{ a. e.}$$

于是有

$$F_n^k \subset G \cap \overline{S}(0,\eta^k) \in \mathbf{P}_{wkc}(X), w \in \Omega \backslash N_0, n \geqslant 1$$

其中 N_0 是一可略集．又 F_n^k 为 $\mathbf{A}_n$ 可测，且

$$E\|F_n^k\| \leqslant E\eta_n^k < \infty, n \geqslant 1$$

均为显然，故$\{F_n^k, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega;X]$ 值适应列，由$\{\eta_n^k, n \geqslant 1\}$ 的鞅性和引理 4.5.5 可得

$$\begin{aligned}
E[F_{n+1}^k/\mathbf{A}_n] &= E[F_{n+1} \cap \overline{S}(0,\eta_{n+1}^k)/\mathbf{A}_n] \\
&\subset E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n] \cap E[\overline{S}(0,\eta_{n+1}^k)/\mathbf{A}_n] \\
&\subset F_n \cap \overline{S}(0, E[\eta_{n+1}^k/\mathbf{A}_n]) \\
&= F_n \cap \overline{S}(0,\eta_n^k) = F_n^k \text{ a. e. }, n \geqslant 1
\end{aligned}$$

故$\{F_n^k, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega;X]$ 值上鞅，且有

$$\sup_n E\|F_n^k\| \leqslant \sup_n E\eta_n^k < \infty$$

从而由定理 4.5.1 知存在 $F^k \in \mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega;X]$ 和可略集 N_k，使有

$$(K.M)F_n^k \to F^k, w \in \Omega \backslash N_k; n \to \infty$$

令

$$N = \bigcup_{k \geqslant 1} N_k$$

$$F = \begin{cases} \bigcup\limits_{k \geqslant 1} F^k, w \in \Omega \backslash N \\ \{0\}, w \in N \end{cases}$$

由引理 4.5.6 知

$$(K.M)F_n \to F, w \in \Omega \backslash N$$

这时 $F(w) \in \mathbf{P}_{fwkc}(X), w \in \Omega$ 为显然，且因为每一个 F^k 均为随机集，故 F 仍是随机集，且 $S_F^1 \supset S_{F_k}^1 \neq \varnothing$ 为显然，定理证毕．

引理 4.5.7 设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{P}_f(X)$ 值随机集，且

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots$$

对任一子 σ 代数 $\mathbf{F} \subset \mathbf{A}$，有

$$E[F/\mathbf{F}] = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\geqslant 1} E[F_n/\mathbf{F}])\text{a.e.}$$

证明 令

$$G = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\geqslant 1} E[F_n/\mathbf{F}])$$

易证 G 及 F 均为 $\mathbf{P}_f(X)$ 值随机集，且 G 是 $\mathbf{F}$ 可测的．因为

$$S_{F_1}^1 \subset S_{F_2}^1 \subset \cdots \subset S_F^1$$

所以有

$$S_{E[F_1/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F}) \subset S_{E[F_2/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F}) \subset \cdots \subset S_G^1(\mathbf{F})$$

对任意的 $f \in S_F^1$，由定理 2.3.7 有

$$\inf_{g \in SF} \| f - g \|_1 = E(d(f, F_n)) \to 0, n \to \infty$$

因为 $d(f, F_n) \in L^1[\Omega; R^1]$，且 $d(f, F_n) \downarrow (n \uparrow)$，故有

$$f \in \mathrm{cl}(\bigcup_{n\geqslant 1} S_{F_n}^1)$$

由 $f \in S_F^1$ 的任意性知

$$S_F^1 \subset \mathrm{cl}(\bigcup_{n\geqslant 1} S_{F_n}^1)$$

成立，而反向的包含关系为显然，所以有

$$S_F^1 = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\geq 1} S_{F_n}^1)$$

类似地可证

$$S_G^1(\mathbf{F}) = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\geq 1} S_{E[F_n/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F}))$$

成立，从而有

$$S_{E[F/\mathbf{F}]}^1(\mathbf{F}) = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\geq 1}\{E(f/\mathbf{F}); f \in S_F^1\})$$

$$= S_G^1(\mathbf{F})E(F/\mathbf{F})$$

$$= G \text{ a. e.}$$

引理得证.

引理 4.5.8 设 $A \in \mathbf{P}_{fc}(X)B \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，则下述等价：

(1) $A \subset B$;

(2) $\sigma(x^*, A) \leqslant \sigma(x^*, B), x^* \in D^*$

证明 "(1)⇒(2)"为显然，设(2)成立. 对任给的 $x^* \in X^*$，存在 $\{x_k^*, k \geqslant 1\} \subset D^*$，使有 $x_k^* \xrightarrow{m(x^*x)} x^*, k \to \infty$. 由 Mackey 拓扑在 w 紧集上的一致性知有

$$\sigma(x^*, A) = \sup_{x\in A}\lim_k < x_k^*, x > \leqslant \limsup_{k\to\infty}\sigma(x_K^*, A)$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty}\sigma(x_K^*, B) = \sigma(x^*, B)$$

由于 $x^*, \in X^*$ 的任意性知(1) 成立，引理证毕.

定理 4.5.2(续) 在定理 4.5.2 中，若条件(i) 加强为 (i)′$\{d(0, F_n), n \geqslant 1\}$ 一致可积，则 $E[F/\mathbf{A}_n] \subset F_n$ a. e. , $n \geqslant 1$.

证明 继续采用定理 4.5.2 证明中的符号，对每一个 $k \geqslant 1$，$\{F_n^k, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega; X]$ 值上鞅，因为 $\{\xi_n^k, n \geqslant 1\}$ 一致可积，所以它的 Krickeberg 分解中的正可积鞅

$$\{\eta_n^k, n \geqslant 1\}$$

也一致可积，但 $\| F_n^k \| \leqslant \eta_n^k, n \geqslant 1$，从而 $\{\| F_n^k \|, n \geqslant 1\}$ 一致可积，于是对任给的 $x^* \in X^*$，$\{\sigma(x^*, F_n^k), n \geqslant 1\}$ 一致可积．现在对任意取定的 $n \geqslant 1$ 和 $x^* \in D^*$，有

$$\sigma(x^*, E[F^k/\mathbf{A}_n]) = E[\sigma(x^*, F^k)/\mathbf{A}_n]$$
$$= L^1 - \lim_{m \to \infty} E[\sigma(x^*, F_m^k)/\mathbf{A}_n]$$
$$= \sigma(x^*, F_n^k) \text{ a.e. } (x^*)$$

由 D^* 的可列性知存在可略集 N，使有

$$\sigma(x^*, E[F^k/\mathbf{A}_n]) \leqslant \sigma(x^*, F_n^k), w \in \Omega \backslash N, x^* \in D^*$$

故由引理 4.5.8 知

$$E[F^k/\mathbf{A}_n] \subset F_n^k \text{ a.e.}$$

由于

$$F_n = \bigcup_{k \geqslant 1} F_n^k, F = \bigcup_{k \geqslant 1} F^k$$

运用引理 4.5.7 可得

$$E[F/\mathbf{A}_n] = E[\bigcup_{k \geqslant 1} F^k/\mathbf{A}_n]$$
$$= \mathrm{cl}(\bigcup_{k \geqslant 1} E[F^k/\mathbf{A}_n])$$
$$\subset \mathrm{cl}(\bigcup_{k \geqslant 1} F_n^k) = F_n \text{ a.e.}, n \geqslant 1$$

定理证毕．

引理 4.5.9 设 $F \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$，则 $S_F^1 \in \mathbf{P}^1_{wkc}(L^1[\Omega; X])$．

证明 由定理2.3.8推论2.2.2知 $S_F^1 \in \mathbf{P}_{bfc}(L^1[\Omega; X])$，要证明的是 S_F^1 的弱紧性，任取 $x^*(w) \in (L^1[\Omega; X])^* =$

$L^{\infty}[\Omega;X^*_{w^*}]$，由定理 2.3.7 有

$$\sup_{f\in S_F} < x^*, f > = \sup_{f\in S_F^1}\int_\Omega < x^*,(w), f(w) > d\mu$$

$$= \int_\Omega \sigma(x^*, F) d\mu$$

令

$$G = \{x \in F, < x^*, x > = \sigma(x^*, F)\}$$

由于 $F(w) \in \mathbf{P}_{wkc}(X), w \in \Omega$，所以 $G(w) \neq \varnothing, w \in \Omega$，且因为

$$\mathrm{Gr}(G) = \{(w,x) \in \Omega \times X, < x^*, x > - \sigma(x^*, F)$$
$$= 0\} \cap \mathrm{Gr}(F) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}(X)$$

所以存在 G 的可测选择 $\hat{f}, \hat{f} \in S_F^1$，从而有

$$\sup_{f\in F} < x^*, f > = \int_\Omega \sigma < x^*, F) d\mu = < x^*, \hat{f} >$$

由 $x^* \in (L^1[\Omega;X])^*$ 的任意性和 James 定理知

$$S_F^1 \in \mathbf{P}_{wkc}(L^1[\Omega;X])$$

引理证毕

引理 4.5.10 设 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{A}$ 的子 σ 代数，若 $F \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$，则

$$M = \{E[f/\mathbf{F}], f \in S_F^1\} \in \mathbf{P}_{wkc}(L^1[\Omega, \mathbf{F}, \mu; X])$$

证明 记 $Y = L^1[\Omega, \mathbf{F}, \mu; X]$，则 $(Y, \| * \|)$ 是 Banach 空间，此时 $M \in \mathbf{P}_{bc}(Y)$ 显然，可证明 $M \in \mathbf{P}_{bfc}(Y)$. 为此设

$$\{x_n = E(f_n/\mathbf{F}), f_n \in S_F^1, n \geq 1\} \subset M$$

若存在 $y \in Y$，使有 $\| x_n - y_n \|_1 \to 0 (n \to \infty)$. 首先证明 $y \in$

M，由于 $S_F^1 \in \mathbf{P}_{wkc}(L^1[\Omega;X])$，故存在

$$\{f_{nk},k \geqslant 1\} \subset \{f_n,n \geqslant 1\};f \in S_F^1$$

使有

$$(W_L)f_{n_k} \to f \ (k \to \infty)$$

令 $x = E(f/\mathbf{F})$，则 $x \in M$，对任取的

$$x^*(\omega) \in Y^* \subset (L^1[\Omega;X])^*$$

有

$$\begin{aligned}|<x^*(\omega),y-x>| &\leqslant |<x^*(\omega),y-E(f_{nk}/\mathbf{F})> \\ &\quad +<x^*(\omega),E(f_{nk}-f/\mathbf{F})>| \\ &\leqslant \|x^*(\omega)\| \cdot \|y-x_{nk}\|_1 \\ &\quad +|<x^*(\omega),f_{nk}-f>| \to 0 \\ &\quad (k \to \infty)\end{aligned}$$

故 $<x^*(\omega),y>=<x^*(\omega),x>$. 由 $x^*(\omega) \in Y^*$ 的任意性知

$$y = x \in M$$

再证明 $M \in \mathbf{P}_{wkc}(Y)$.

因为 $S_F^1 \in \mathbf{P}_{wkc}(L^1[\Omega,\mathbf{F},\mu;X])$，于是对任给的

$$x^*(w) \in (L^1[\Omega,\mathbf{F},\mu;X])^* \subset (L^1[\Omega;X])^*$$

存在 $\hat{f} \in S_F^1$，使有 $\sup\limits_{f \in S_F^1} <x^*,f>=<x^*,\hat{f}>$，从而有

$$\begin{aligned}\sup_{g \in m} <x^*,g> &= \sup_{g \in m} \int_\Omega <x^*(w),g(w)> d\mu \\ &= \sup_{f \in S_F^1} \int_\Omega <x^*(w),E[f/\mathbf{F}]> d\mu\end{aligned}$$

$$= \sup_{f \in S_F^1} \int_\Omega < x^*(w), f(w) > d\mu$$

$$= \int_\Omega < x^*(w), \tilde{f}(w) > d\mu$$

$$= \int_\Omega < x^*(w), E[\tilde{f}/\mathbf{F}] > d\mu$$

$$= < x^*, E[\tilde{f}/\mathbf{F}] >$$

仍由 James 定理知 $M \in \mathbf{P}_{wkc}(L^1[\Omega,\mathbf{F},\mu;X])$，证毕.

引理 4.5.11 设$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$，且

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \text{ a.e.}$$

又 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{A}$ 的子 σ 代数，则有

$$E[\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n/\mathbf{F}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[F_n/\mathbf{F}], \text{ a.e.}$$

证明 由引理 4.1.5 知 $F = \bigcap_{n \geqslant 1} F_n \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$，这时

$$E[F_n/\mathbf{F}] \downarrow (n \uparrow) \text{ a.e.}$$

$$S_F^1 = \bigcap_{n \geqslant 1} S_{F_n}^1,\ S^1_{\bigcap_{n \geqslant 1} E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F}) = \bigcap_{n \geqslant 1} S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

均为显然，对任取的 $f \in S^1_{\bigcap_{n \geqslant 1} E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$，因为

$f \in \bigcap_{n \geqslant 1} S^1_{E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$，由引理 4.5.10 知存在 $fn \in S^1_{F_n}, n \geqslant 1$，使有

$$E[f_n/\mathbf{F}] = f, \text{a.e.}, n \geqslant 1$$

由于$\{f_n, n \geqslant 1\} \subset S^1_{F_1} \in \mathbf{P}_{wkc}(L^1[\Omega;X])$. 故存在子列$\{f_{nk}, k \geqslant 1\}$，使得在 $L^1[\Omega;X]$ 中 w 收敛于某个 $g \in L^1[\Omega;X]$，于是有

$$E[g/\mathbf{F}] = f, \text{ a.e.}$$

又由于$S^1_{F_n}\downarrow(n\uparrow)$，所以$g\in S^1_{F_n},n\geqslant 1$，因而$g\in\bigcap_{n\geqslant 1}S^1_{F_n}=S^1_F$，由此知

$$f=E[g/\mathbf{F}]\in S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

由$f\in S^1_{\bigcap_{n\geqslant 1}E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$的任意性知

$$S^1_{\bigcap_{n\geqslant 1}E[F_n/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})\subset S^1_{E[F/\mathbf{F}]}(\mathbf{F})$$

成立，因而有

$$\bigcap_{n\geqslant 1}E[F_n/\mathbf{F}]\subset E[F/\mathbf{F}],\ \text{a.e.}$$

但相反的包含关系为显然，故结论成立，引理证毕．

引理 4.5.12 设$\{F_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$值上鞅，若

$$G_n=\bigcap_{m\geqslant n}E[F_m/\mathbf{A}_n],n\geqslant 1$$

则$\{G_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$值鞅．

证明 对任意取定的$n\geqslant 1$，$E[F_m/\mathbf{A}_n]\downarrow(m\uparrow)$a.e. 为显然，且因为$E[F_m/\mathbf{A}_n]\subset F_n$，a.e.，$m\geqslant n$，于是对

$$\{E[F_m/\mathbf{A}_{n+1}],m\geqslant n+1\}$$

和$\{E[F_m/\mathbf{A}_n],m\geqslant n\}$关于子$\sigma$代数$\mathbf{A}_n$分别应用引理4.5.11可得

$$\begin{aligned}E[G_{n+1}/\mathbf{A}_n]&=E[\bigcap_{m\geqslant n+1}E[F_m/\mathbf{A}_{n+1}]/\mathbf{A}_n]\\&=\bigcap_{m\geqslant n+1}E[F_m/\mathbf{A}_n]\\&=E[\bigcap_{m\geqslant n}F_m/\mathbf{A}_n]\\&=G_n,\text{a.e.},n\geqslant 1\end{aligned}$$

由此知$\{G_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$值鞅，证毕．

定理 4.5.3 设X有 RNP 性质而且X^*可分，$\{F_n,n\geqslant$

1} 是 $\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$ 值上鞅，若有 $\sup\limits_T E\|F_\tau\|<\infty$，则存在 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值随机集 F，使有

$$(K\cdot M)(w)F_n\to F,\ \text{a.e.}\ n\to\infty$$

$$\|\bigcap_{m\geq n}E[F_m/\mathbf{A}_n]\|\to\|F\|,\ \text{a.e.}\ n\to\infty$$

证明 令 $G_n=\bigcap\limits_{m\geq n}E[F_n/\mathbf{A}_n],n\geq 1$，由引理 4.5.12 知 $\{G_n,n\geq 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$ 值鞅，且有

$$\sup_n E\|G_n\|\leqslant\sup_n E\|F_n\|<\infty$$

于是由定理 4.3.9 或定理 4.4.1 知存在 $F\in L_{bfc}[\Omega;X]$，使有

$$(K.M)(w)Gn\to F,\ \|F_n\|\to\|F\|,\ \text{a.e.},n\to\infty$$

对每一个 $x^*\in X^*$，由引理 4.5.1 有

$$\begin{aligned}\sigma(x^*,G_n)&=\sigma(x_*,\bigcap_{m\geq n}E[F_m/\mathbf{A}_n])\\&=\lim_{m\to\infty}\sigma(x^*,E[F_m/\mathbf{A}_n])\\&=\lim_{m\to\infty}\sigma(x^*,F_m)/\mathbf{A}_n],\text{a.e.},n\geq 1\end{aligned}$$

而 $\{\sigma(x^*,F_n),n\geq 1\}$ 是实值上鞅，且满足

$$\sup_n E\,\sigma(x^*,F_n)\leqslant\|x^*\|\cdot\sup_n E\|F_n\|<\infty$$

故 $\{\sigma(x^*,F_n),n\geq 1\}$ 是 L^1 有界实值 Amart，因而是 subpramart（见[33]）．这时有

$$\begin{aligned}\sigma(x^*,G_n)&=\lim_{m\to\infty}E[\sigma(x^*,F_m)/\mathbf{A}_n]\\&=\operatorname*{einf}_{\tau\in T(n)}E[\sigma(x^*,F_\tau)/\mathbf{A}_n],\ \text{a.e.}\ (\mathbf{x}^*)\end{aligned}$$

因为 $(w)G_n\to F$ a.e.，于是由引理 4.4.1 有

$$\sigma(x^*,F) = \lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,G_n) = \lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,F_n) \text{ a.e. } (x^*)$$

其中的例外集均与 x^* 有关，因 X^* 可分，而由极大值不等式有 $\sup_n \| F_n \| < \infty$ a.e.，故由通常的稠密性叙述即知存在可略集 N，使有

$$\sigma(x^*,F) = \lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,F_n), w \in \Omega\backslash N, x^* \in X^*$$

这表明

$$w\text{-}\lim_{n\to 1}\sup F_n \subset F, (w)F_n \to F \text{ a.e. }, n\to\infty$$

而 $F = s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf G_n \subset s\text{-}\lim_{n\to\infty}\inf F_n$ a.e. 为显然，故有

$$(K.M)Fn \to F \text{a.e.}, n\to\infty$$

定理证毕.

定理4.5.4 设 X 有RNP性质而且 X^* 可分，$\{F_n, n\geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{P}_{lwkc}(X)$ 值上鞅，若 $\sup_n Ed(0,F_n) < \infty$，则存在 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值随机集 F，使有

$$(K.M)F_n \to F_n, \text{a.e.}, n\geqslant 1$$

又若 $\{d(0,F_n), n\geqslant 1\}$ 一致可积，则有

$$E[F/A_n] \subset F_n \text{ a.e.}, n\geqslant 1$$

证明 运用定理 4.5.2 的证明方法和符号，令

$$F_n^k = F_n \cap \overline{S}(0,\eta_n^k), n\geqslant 1, k\geqslant 1$$

对每一个 $k\geqslant 1$，$\{F_n^k, n\geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$ 值上鞅，且有

$$\sup_T E\| F_\tau^k \| \leqslant \sup_T E\eta_\tau^k = E\eta_1^k < \infty$$

于是由定理 4.5.3 知存在 $F^k \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 和可略集 N_k，使有

$$(K.M)F_n^k \to F^k, w \in \Omega\backslash N_k, n\to\infty$$

接下去如同定理 4.5.2 的证明即知结论成立，证毕.

下述例子表明对无界集值下鞅，不能得到如定理 4.5.2 和定理 4.5.4 那样的收敛性结论.

例 4.5.1 设 $\{\eta_n, n \geqslant 1\}$ 是实值独立随机变量序列，且

$$\mu(\eta_n = 1) = \frac{1}{n}, \mu(\eta_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, n \geqslant 1$$

令

$$\zeta_1 = \eta_1, \zeta_n = \eta_n \chi_{(\zeta_{n-1}=0)} + n\eta_n\zeta_{n-1}\chi_{(\zeta_{n-1}\neq 0)}, n \geqslant 2$$

$$A_n = \sigma(\eta_1, \cdots, \eta_n), n \geqslant 1$$

则 $\{\zeta_n, A_n, n \geqslant 1\}$ 是适应可积列，且

$$E[\eta_{n+1}/A_n] = (n+1)^{-1}, n \geqslant 1$$

于是有

$$E[\zeta_{n+1}/A_n] = (n+1)^{-1}\chi_{(\zeta_n=0)} + \zeta_n\chi_{(\zeta_n\neq 0)} \geqslant \zeta_n, n \geqslant 1$$

所以 $\{\zeta_n, A_n, n \geqslant 1\}$ 是实值非负下鞅，又因为

$$(\zeta_n = 0) = (\eta_n = 0), n \leqslant 1$$

故有

$$\mu(\zeta_n > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty, \varepsilon > 0$$

这表明 $\zeta_n \to 0$, pr. 但同时又有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\eta_n = 1) = \infty$$

于是由 Borel-Cantelli 引理知

$$\mu(\zeta_n \neq 0 \text{ i.o.}) = \mu(\eta_n \neq 0 \text{ i.o.}) = 1$$

但是 $\{\zeta_n, n \geqslant 1\}$ 只是在非负整数中取值，因而上式表明

$$\zeta_n \to 0, \text{a. e.}, n \to \infty$$

不成立，事实上容易验证这时有

$$\liminf_{n\to\infty} \zeta_n = 0,\ \limsup_{n\to\infty} \zeta_n = \infty \text{ a. e.}$$

现在令 $X = R^1, F_n = [0, \zeta_n], n \geqslant 1$，则 $\{F_n, A_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; R^1]$ 值下鞅，这时

$$\sup_n d(0, F_n) = 0$$

为显然，但又有

$$\delta(F_m, F_n) = |\zeta_m = \zeta_n| \to 0 \text{ 不成立}, \text{a. e.}, m \geqslant n \to \infty$$

故不可能存在 $\mathbf{P}_{fc}(R)$ 值随机集 F，使有

$$\delta(F_m, F) \to 0 \text{ 或} (K.M) F_n \to F, \text{a. e.}, n \to \infty$$

成立.

上述例子还表明，即使空间 X 是有限维的，或者是 $\mathbf{L}^1_{kc}[\Omega; X]$ 值下鞅，仅有条件 $\sup_n Ed(0, F_n) < \infty$，不能保证它能有集值上鞅那样的收敛性.

关于集值鞅、下鞅与上鞅的收敛性的讨论，一般均要求所讨论的随机集具有凸性，关于非凸集值鞅、下鞅与上鞅的收敛性，已知的结果极少. 张文修和高勇在[130]中证明了下述定理.

定理 4.5.5　设 X 是有限维 Banach 空间，$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{P}_f(X)$ 值上鞅，若 $\sup_n Ed(0, F_n) < \infty$，则存在 $\mathbf{P}_f(X)$ 值随机集 $F, S^1_F \neq \varnothing$，使有 $(K) F_n \to F$, a. e., $n \to \infty$.

§4.6 集值上(下)鞅的 Riesz 分解与 Doob 分解

本节恒设 X 为自反的 Banach 空间,在 $\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 上定义代数运算如下:

$$A + B = \{x_1 + x_2 \in X, x_1 \in A, x_2 \in B\}$$

$$A_x = \{x\} + A$$

$$\hat{B} = \{-x, x \in B\}$$

$$A \ominus B = \bigcup_{x \in B} A_x = \{z, \hat{B}_z \subset A\}$$

$$A_B = (A \ominus \hat{B}) + B$$

定义 4.6.1 称 $A \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 关于 $B \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 位似,如果存在 $C \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$,使得 $A = B + C$.

引理 4.6.1 设 A、$B \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$,则下列命题等价:

(1) A 关于 B 位似;

(2) $\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, B)$ 为 X^* 上的凸函数;

(3) $A_B = A$.

证明 由支撑函数的性质易证(1)与(2)等价.

"(1)⇒(3)" 若(1)成立,则存在 $C \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$,使得

$$A = B + C \tag{4.6.1}$$

任给 $x \in A$,取 $y \in B$,$z \in C$,使得 $x = y + z$. 由(4.6.1)易知 $z \in A \ominus \hat{B}$,故 $x \in A_B$,则 $A \subset A_B$. 反之,任给 $x \in A_B$,依定义存在 $z \in A \ominus \hat{B}$,$y \in B$,使得 $x = y + z$. 由 $A \ominus \hat{B}$ 的含义知 $z + y = x \in A$,故 $A_B \subset A$. 即证(3)成立.

“(3)⇒(1)” 若(3)成立，则有

$$A = A_B = (A \ominus \hat{B}) + B$$

同样，依 $A \ominus \hat{B}$ 的定义知 $A \ominus \hat{B} \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，故 A 关于 B 位似.

定义 4.6.2 称 $\{Z_n, n \geq 1\} \subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$ 为集值位势，如果

(1) $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为集值上鞅

(2) 任给 $n \geq 1$, $0 \in Z_n(w)$, a.e.

(3) $(K.M)\int_\Omega Z_n d\mu \to \{0\}$.

定义 4.6.3 称集值上鞅 $\{F_n, n \geq 1\} \subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$ 可 Riesz 分解，若存在集值鞅 $\{G_n, n \geq 1\} \subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$ 及集值位势 $\{Z_n; n \geq 1\} \subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega, X]$，使得任给 $n \geq 1$, $F_n = G_n + Z_n$ a.e.

定理 4.6.1 若 $\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$ 中的集值上鞅可 Riesz 分解，则分解必唯一.

证明 设 $\{F_n, n \geq 1\}$ 为集值上鞅，其 Riesz 分解为

$$F_n = G_n + Z_n, \ n \geq 1$$

则任给 $x^* \in X^*$, $\sigma(x^*, F_n) = \sigma(x^*, G_n) + \sigma(x^*, Z_n)(n \geq 1)$ 为实值上鞅 $\{\sigma(x^*, F_n), n \geq 1\}$ 的 Riesz 分解. 由于 X 自反，故依实值上鞅 Riesz 分解的唯一性易证定理成立.

定理 4.6.2 设 $\{F_n, n \geq 1\} \subset \mathbf{L}^1_{kc}[\Omega; R^1]$ 为集值上鞅，则它存在 Riesz 分解.

证明 任给 $n \geq 1$，令

$$a_n(w) = \max\{x, x \in F_n(w)\}$$

$$b_n(w) = -\min\{x, x \in F_n(w)\}$$

易知$\{a_n, n \geqslant 1\}$,$\{b_n, n \geqslant 1\}$均为实值上鞅.由于

$$\int_\Omega F_1 d\mu \supset \int_\Omega F_2 d\mu \supset \cdots \supset \int_\Omega F_n d\mu \supset \cdots$$

故任给$n \geqslant 1$,有

$$\int_\Omega a_n d\mu = \max\{x, x \in \int_\Omega F_n d\mu\}$$

$$\geqslant \min\{x, x \in \int_\Omega F_n d\mu\}$$

$$\geqslant \min\{x, x \in \int_\Omega F_1 d\mu\} > -\infty$$

同理可知,任给$n \geqslant 1$,有

$$\int_\Omega b_n d\mu \geqslant -\max\{x, x \in \int_\Omega F_1 d\mu\} > -\infty$$

因此$\{a_n, n \geqslant 1\}$,$\{b_n, n \geqslant 1\}$均存在 Riesz 分解,记作

$$a_n = a_n^1 + a_n^2 \qquad \text{a. e.}$$

$$b_n = b_n^1 + b_n^2 \qquad \text{a. e.}$$

依实值上鞅 Riesz 分解的构造可知:

$$-b_n^1(w) = -\lim_{k\to\infty} E[b_{n+k}/A_n]$$

$$= \lim_{k\to\infty} E[-b_{n+k}/A_n]$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty} E[a_{n+k}/A_n]$$

$$= a_n^1(w) \qquad \text{a. e.} \quad (n \geqslant 1)$$

同理有

$$-b_n^2(w) \leqslant 0 \leqslant a_n^2(w)$$

任给 $n \geqslant 1$，令

$$G_n(w) = [-b_n^1(w), a_n^2(w)]$$

$$Z_n(w) = [-b_n^2(w), a_n^2(w)]$$

易知 $\{G_n, n \geqslant 1\}$ 为集值鞅，$\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 为集值位势，且

$$F_n = G_n + Z_n \qquad \text{a.e.} \qquad (n \geqslant 1)$$

即证定理成立.

定理4.6.3　设 $\{F_n; n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega; X]$ 为集值上鞅，则下列命题等价：

(1)　$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 可 Riesz 分解；

(2)　任给 $n \geqslant 1$，$F_n(w)$ 关于 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E[F_{n+k}/A_n]$ 位似.

证明　"(1)⇒(2)"　设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 的 Riesz 分解为

$$F_n = G_n + Z_n \qquad \text{a.e.} \qquad (n \geqslant 1)$$

其中 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 为集值鞅，$\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 为集值位势. 下面证明

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E[F_{n+k}/A_n] = G_n \qquad \text{a.e.} \tag{4.6.2}$$

由于 $E[F_{n+k}/A_n] \downarrow (k \to \infty)$ 且任给 $k \geqslant 1$，$E[F_{n+k}/A_n] \subset F_n$ (a.e.)，故知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E[F_{n+k}/A_n] \in \mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega; X]$. 根据同样理由可证 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E[Z_{n+k}/A_n] \in \mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega; X]$. 由 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 为集值位势易知任给 $x^* \in X^*$，$\{\sigma(x^*, Z_n), n \geqslant\}$ 为实值位势，则

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(x^*, Z_n) = 0$$

从而依引理4.5.1知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} Z_n = \{0\}$ (a.e.). 因此由引理4.5.11，有

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E[F_{n+k}/A_n] = E[\bigcap_{k=1}^{\infty} Z_{n+k}/A_n] = \{0\} \text{ (a. e.)}$$

则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E[F_{n+k}/A_n] = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E[G_{n+k}/A_n] + E[Z_{n+k}/A_n]) = G_n \text{ a. e.}$$

(4.6.2) 得证，因此 F_n 关于 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E[F_{n+k}/A_n]$ 位似.

"(2)⇒(1)"　任给 $n \geqslant 1$，设

$$G_n(w) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E[F_{n+k}/A_n] \tag{4.6.3}$$

由 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是集值上鞅易知 $E[F_{n+k}/A_n] \downarrow (k \to \infty)$ 且任给 $k \geqslant 1$，$E[F_{n+k}/A_n] \subset F_n \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$，故 $G_n \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$，且依引理 4.5.11，任给 $n \geqslant 1$，有

$$\begin{aligned} E[G_n/A_{n-1}] &= \bigcap_{k=1}^{\infty} E[E[F_{n+k}/A_n]/A_{n-1}] \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} E[F_{n+k}/A_{n-1}] \\ &= G_{n-1} \text{ a. e.} \end{aligned}$$

因此 $\{G_n, n \geqslant 1\}$ 为集值鞅，且 $G_n \subset F_n$ a. e. $(n \geqslant 1)$. 令

$$P_n(x^*, w) = \sigma(x^*, F_n(w)) - \sigma(x^*, G_n(w)) \quad (n \geqslant 1, x^* \in X^*) \tag{4.6.4}$$

由于 F_n 关于 $G_n(w) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E[F_{n+k}/A_n]$ 位似，故知 $\{P_n(x^*, F_n), n \geqslant 1\}$ 为一族 X^* 上弱星下半连续的凸函数. 任取 $\{x_i^*, i \geqslant 1\} \subset X^*$ 为 X^* 上强稠密点列，定义

$$Z_n(w) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X, \langle x_i^*, x \rangle \leqslant P_n(x_i^*)\}$$

则易知 $Z_n \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$，且 $\sigma(x^*, Z_n) = P_n(x^*)$ $(x^* \in X^*)$，

从而 $F_n = G_n + Z_n$ a.e. $(n \geqslant 1)$，因此 $Z_n \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$. 下面证明 $\{Z_n; n \geqslant 1\}$ 为集值位势. 由(4.6.3)知，任给 $x^* \in X^*$，有

$$\sigma(x^*, G_n) = \lim_{k\to\infty} E[\sigma(x^*, F_{n+k})/A_n]$$

因此由实值上鞅 Riesz 分解的构造有，

$$\sigma(x^*, F_n) = \sigma(x^*, G_n) + P_n(x^*, w)$$

为 $\{\sigma(x^*, F_n), n \geqslant 1\}$ 的 Riesz 分解. 则知 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 为集值上鞅，且依(4.6.4)，$P_n(x^*, w) \geqslant 0$ a.e. $(n \geqslant 1)$，从而 $0 \in Z_n(w)$ a.e. $(n \geqslant 1)$. 由于 $\int_\Omega Z_n d\mu \downarrow$，$\int_\Omega Z_n d\mu \in \mathbf{L}_{wkc}(X)$，且显然有

$$(w)\int_\Omega Z_n d\mu \to \{0\}$$

因此易证 $(K.M)\int_\Omega Z_n d\mu \to \{0\}$，即知 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 为集值位势.

下面给出一个例子来说明即使在二维平面情形，并非所有集值上鞅都存在 Riesz 分解.

例 4.6.1 考虑 $\mathbf{L}_k(R^2)$ 上的集值上鞅 $\{F_n, n \geqslant 1\}$：

$$F_n(w) = \overline{\text{co}}\{a_n(w), b_n(w), c_n(w), d_n(w)\} \quad (w \in \Omega)$$

其中

$$a_n(w) = (x_n(w), 0)$$
$$b_n(w) = (x_n(w), M - x_n(w))$$
$$c_n(w) = (0, M)$$
$$d_n(w) = (0, 0)$$

而 $\{x_n(w), n \geqslant 1\}$ 为实值上鞅，$M > 0$，且 $x_n(w) \leqslant M$ $(w \in \Omega, n \geqslant 1)$. 显然 $\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}^1_k[\Omega; R^2]$ 为集值上鞅，且一致

有界(从而一致可积). 下面说明$\{F_n, n \geqslant 1\}$不可能存在Riesz分解.

设$\{x_n(w), n \geqslant 1\}$的Riesz分解为:

$$x_n(w) = x_n^{(1)}(w) + x_n^{(2)}(w)$$

由F_n的定义可得:

$$\sigma(p, F_n) = \begin{cases} p_2 M, p_1 \leqslant 0, p_2 \geqslant 0 \\ 0, p_1 \leqslant 0, p_2 < 0 \\ p_1 x_n, p_1 > 0, p_2 \leqslant 0 \\ p_1 M + (p_1 - p_2) x_n, p_1, p_2 \geqslant 0, \text{且 } p_1 \geqslant p_2 \\ p_2 M, p_1, p_2 \geqslant 0, \text{且 } p_1 < p_2 \end{cases}$$

其中$p = (p_1, p_2) \in R^2$. 假设$\{F_n, n \geqslant 1\}$的Riesz分解为$F_n = G_n + Z_n$, 则任给$p \in R^2$, $\sigma(p, F_n) = \sigma(p, G_n) + \sigma(p, Z_n)$为$\{\sigma(p, F_n), n \geqslant 1\}$的Riesz分解. 通过简单的计算可得:

$$\sigma(p, G_n) = \begin{cases} p_2 M, p_1 \leqslant 0, p_2 \geqslant 0 \\ 0, p_1 \leqslant 0, p_2 < 0 \\ p_1 x_n^{(1)}, p_1 > 0, p_2 \leqslant 0 \\ p_1 M + (p_1 - p_2) x_n^{(1)}, p_1, p_2 \geqslant 0, \text{且 } p_1 \geqslant p_2 \\ p_2 M, p_1, p_2 \geqslant 0, \text{且 } p_1 < p_2 \end{cases}$$

因此由紧凸集与其支撑函数的关系可知

$$G_n(w) = \overline{\text{co}}\{(x_n^{(1)}(w), 0), (x_n^{(1)}, M - x_n^{(1)}), (0,0), (0, M)\}$$

但是, 如果画出图形, 我们就可以看出, 任给$w \in \Omega$不可能存在紧凸集$Z \in \mathbf{P}_{kc}(R^2)$, 使得$F_n(w) = G_n(w) + Z$, 这与假设$\{F_n, n \geqslant 1\}$存在Riesz分解矛盾.

例 4.6.1 告诉我们集值上鞅 Riesz 分解的困难主要是由于超空间上代数运算的缺陷导致的. 但我们可以不追求严格意义下的 Riesz 分解,转而研究集值上鞅各种意义下的 Riesz 逼近.

定理 4.6.4 设 X 是有限维的,$\{F_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_k[\Omega,X]$ 为集值上鞅,且一致可积,则存在集值鞅 $\{G_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_{kc}[\Omega,X]$ 及集值适应列 $\{Z_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_k[\Omega,X]$,使得

$$F_n\subset G_n+Z_n \text{ a.e. } (n\geqslant 1)$$

$$\int_\Omega \| Z_n \| d\mu \to 0$$

并且,若另有一集值适应列 $\{Z'_n;n\geqslant 1\}$ 满足上面两式,则有

$$\| Z'_n \| \geqslant \| Z_n \| \text{ a.e. } (n\geqslant 1)$$

证明 由集值上鞅收敛定理知存在 $F\in \mathbf{L}^1_k[\Omega;X]$,使得

$$\triangle(F_n,F)\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

令 $G_n=E[F/A_n]$ $(n\geqslant 1)$,则 $\{G_n,n\geqslant 1\}$ 为集值鞅,且依定理 4.3.11 有

$$\triangle(G_n,F)\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

定义

$$Z_n(w)=\{x\in X,\ \| x\| \leqslant \delta_1(G_n,F_n)\}$$

则 $Z_n\in \mathbf{L}^1_k[\Omega;X]$,$F_n\subset G_n+Z_n$(a.e.),且

$$\int_\Omega \| Z_n \| d\mu = \int_\Omega \delta_1(G_n,F_n)d\mu$$

$$\leqslant \int_\Omega \delta(G_n,F_n)d\mu$$

$$\leqslant \int_\Omega \delta(G_n,F)d\mu + \int_\Omega \delta^*(F_n,F)d\mu$$

$$= \triangle(G_n,F) + \triangle(F_n,F) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

由 $\delta_1(*,*)$ 的定义易知后一结论成立.

在本节的后半部分，我们讨论集值下鞅（上鞅）的 Doob 分解.

定义 4.6.4 设 $\{F_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$ 为集值适应列，

(1) 称 $\{F_n,n\geqslant 1\}$ 为集值增(减)过程，如果任给 $n\geqslant 1$，$F_n\subset F_{n+1}$(a.e.)(相应地，$F_n\supset F_{n+1}$ a.e.).

(2) 称 $\{F_n,n\geqslant 1\}$ 为集值可料过程，若任给 $n\geqslant 1$，F_{n+1} 关于 A_n 可测.

定义 4.6.5 称集值下鞅(上鞅) $\{F_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$ 可 Doob 分解，如果存在集值鞅 $\{G_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$ 及零初值集值可料增(减)过程 $\{H_n,n\geqslant 1\}$，使得

$$F_n(w) = G_n(w) + H_n(w) \text{ a.e. } (n\geqslant 1)$$

定理 4.6.5 设 $\{F_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$ 为集值适应过程，则 $\{F_n,n\geqslant 1\}$ 是集值可料过程(增过程、减过程)当且仅当任给 $x^*\in X^*$ $\{\sigma(x^*,F_n),n\geqslant 1\}$ 是实值可料过程(相应地，实值增过程、减过程).

证明 仅就可料情形证明，其它情形类似. 如果 $\{F_n,n\geqslant 1\}$ 为集值可料过程，由推论 2.1.2 即知任给 $x^*\in X^*$，$\{\sigma(x^*,F_n),n\geqslant 1\}$ 为实值可料过程.

反之，若任给 $x^*\in X^*$，$\{\sigma(x^*,F_n);n\geqslant 1\}$ 为实值可料过

程，则任给$n\geqslant 1$，$\sigma(x^*,F_{n+1})$关于A_n可测. 取X^*的强稠密点列$\{x_i^*,i\geqslant 1\}$，由$\sigma(x^*,F_{n+1})$关于$x^*\in X^*$的强连续性可得

$$F_{n+1}(w)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{x\in X,<x_i^*,x>\leqslant\sigma(x^*,F_{n+1})\}$$

于是

$$\mathrm{Gr}F_{n+1}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{(w,x)\in\Omega\times X,<x_i^*,x>$$
$$\leqslant\sigma(x^*,F_{n+1}(w))\}\in\mathbf{A}_n\times\mathbf{B}(X)$$

则由推论 2.1.1 知F_{n+1}关于$\mathbf{A}_n$可测. 因此$\{F_n,n\geqslant 1\}$为集值可料过程.

定理4.6.6 假设$\{F_n,n\geqslant 1\}\subset\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$为集值下鞅，于是$\{F_n,n\geqslant 1\}$有唯一的 Doob 分解当且仅当实值下鞅族$\{\sigma(x^*,F_n),n\geqslant 1\}(x^*,\in X^*)$的 Doob 分解式

$$\sigma(x^*,F_n)=M_n(x^*)+A_n(x^*)\ \text{a.e.}$$

中的过程族

$$\{M_n(x^*),n\geqslant 1\}(x^*\in X^*)$$
$$\{A_n(x^*),n\geqslant 1\}(x^*\in X^*)$$

有满足下列条件的修正

$$\{\widetilde{M}_n(x^*),n\geqslant 1\}(x^*\in X^*)$$

及

$$\{\widetilde{A}_n(x^*),n\geqslant 1\}(x^*\in X^*)$$

(1) $M_n(x^*)=\widetilde{M}_n(x^*),A_n(x^*)=\widetilde{A}_n(x^*)$a.e. $(n\geqslant 1,x^*\in X^*)$

(2) 存在$N\in\mathbf{A},\mu(A)=0$，使得$w\notin N$时，$\{\widetilde{M}_n(\cdot),n$

$\geqslant 1\}$ 与 $\{\tilde{A}_n(\cdot), n \geqslant 1\}$ 均是 X^* 上的正齐次弱星下半连续凸函数.

证明 由定理4.1.3,若 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 为集值下鞅,则任给 $x^* \in X^*$,$\{\sigma(x^*, F_n), n \geqslant 1\}$ 为实值下鞅.依经典的Doob分解定理,存在实值鞅 $\{M_n(x^*, w), n \geqslant 1\}$ 和实值零初值过程 $\{A_n(x^*, w), n \geqslant 1\}$,使

$$\sigma(x^*, F_n) = M_n(x^*, w) + A_n(x^*, w) \text{ a.e.}, \ n \geqslant 1$$

其中

$$M_n(x^*) = \sum_{k=2}^{n} (\sigma(x^*, F_k) - E[\sigma(x^*, F_k)/A_{k-1}]) + \sigma(x^*, F_1), n \geqslant 2$$

$$M_1(x^*) = \sigma(x^*, F_1)$$

$$A_n(x^*) = \sum_{k=2}^{\infty} (E[\sigma(x^*, F_k)/A_{k-1}] - \sigma(x^*, F_{k-1})), n \geqslant 2$$

$$A_1(x^*) = 0$$

"必要性" 如果集值下鞅 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 有Doob分解

$$F_n = G_n + H_n \text{ a.e.}, \ n \geqslant 1$$

其中 $\{G_n, n \geqslant 1\}$ 和 $\{H_n, n \geqslant 1\}$ 分别是 $\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$ 上的集值鞅和零初值可料增过程.则对于任给 $x^* \in X^*$,有

$$\sigma(x^*, F_n) = \sigma(x^*, G_n) + \sigma(x^*, H_n) \text{ a.e.}, \ n \geqslant 1$$

由于

$$\{F_n, G_n, H_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$$

故 $\sigma(x^*, F_n)$、$\sigma(x^*, G_n)$ 及 $\sigma(x^*, H_n)$ 均是 X^* 上的正齐次弱星下半连续凸函数.此外,依定理 4.1.3、定理 4.6.5 知

$\{\sigma(x^*,G_n),n\geq 1\}$ 和 $\{\sigma(x^*,H_n),n\geq 1\}$ 分别为实值鞅和零初值可料增过程，由经典的 Doob 分解的唯一性可有

$$M_n(x^*)=\sigma(x^*,G_n)$$

$$A_n(x^*)=\sigma(x^*,H_n)\ \text{a.e.},(n\geq 1,x^*\in X^*)$$

即证必要性.

"充分性" 若实值过程族 $\{\sigma(x^*,F_n),n\geq 1\}(x^*\in X^*)$ 的 Doob 分解为

$$\sigma(x^*,F_n)=M_n(x^*)+A_n(x^*)\ \text{a.e.}\ (n\geq 1)$$

并且有满足条件(1)、(2) 的修正 $\{\widetilde{M}_n(x^*),n\geq 1\}(x^*\in X^*)$ 以及修正 $\{\widetilde{A}_n(x^*),n\geq 1\}(x^*\in X^*)$，取 X^* 的可数稠密点列 $\{x_i^*,i\geq 1\}$，令

$$G_n(w)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{x\in X,\ <x_i^*,x>\leqslant \widetilde{M}_n(x_i^*,w)\},n\geq 1$$

$$H_n(w)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{x\in X;\ <x_i^*,x>\leqslant \widetilde{A}_n(x_i^*,w)\},n\geq 1$$

则由推论 2.1.1 可证 $G_n,H_n\in L^1_{wkc}[\Omega;X]$，且由定理 1.4.8 知

$$\sigma(x_i^*,G_n)=\widetilde{M}_n(x_i^*)$$

$$\sigma(x_i^*,H_n)=\widetilde{A}_n(x_i^*)$$

于是

$$\sigma(x_i^*,F_n)=\sigma(x_i^*,G_n)+\sigma(x_i^*,H_n),\ \text{a.e.}$$

$$(n\geq 1,x_i^*\in X^*)$$

由 $\sigma(x^*,G_n)$、$\sigma(x^*,H_n)$ 及 $\sigma(x^*,F_n)$ 关于 $x^*\in X^*$ 的强连续性知

$$F_n=G_n+H_n\ \text{a.e.},\ (n\geq 1)$$

依定理4.1.4及定理4.6.5易知$\{G_n,n\geqslant 1\}$为集值鞅,$\{H_n,n\geqslant 1\}$为零初值增过程.即证$\{F_n,n\geqslant 1\}$有Doob分解,唯一性由实值下鞅的Doob分解唯一性易得.

定理4.6.7 设$F,G\in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$,则

$$S^1_{F\ominus G}=S^1_F\ominus\hat{S}^1_G$$

证明 设$f\in S^1_{F\ominus G}$,则$f(w)\in F(w)\ominus\hat{G}(w)$ (a.e.),亦即

$$f(w)+G(w)\subset F(w)\ \text{a.e.}$$

于是$f+S^1_G\subset S^1_F$,从而$f\in S^1_F\ominus\hat{S}^1_G$.因此,有

$$S^1_{F\ominus G}\subset S^1_F\ominus\hat{S}^1_G$$

反之,若$f\in S^1_F\ominus\hat{S}^1_G$,则$f+S^1_G\subset S^1_F$,令$H(w)=\{f(w)\}$,则$S^1_{G+H}=f+S^1_G\subset S^1_F$,从而有$H(w)+G(w)\subset F(w)$,即$f(w)+G(w)\subset F(w)$ (a.e.),因此$f\in S^1_{F\ominus G}$.即证等式成立.

定理4.6.8 设$\{F_n;n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$为集值下鞅,如果存在$N\in A,\mu(N)=0$,使得$w\notin N$时,任给$k\geqslant 1$,

$$\sigma(x^*,F_k(w))-\sigma(x^*,E[F_k/A_{k-1}](w))$$

$$\sigma(x^*,E[F_k/A_{k-1}])-\sigma(x^*,F_{k-1}(w))$$

均是X^*上的凸函数,则$\{F_n,n\geqslant 1\}$存在Doob分解,且其分解具有如下形式:

$$F_n=G_n+H_n\ \text{a.e.},\ n\geqslant 1$$

其中$\{G_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$为集值鞅,$\{H_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$为零初值增过程,且

$$G_n(w) = \sum_{k=2}^{n} (F_k(w) \ominus E[\hat{F}_k/A_{k-1}](w)) + F_1(w),$$

$n \geqslant 1, w \notin N$

$G_1(w) = F_1(w), w \notin N$

$$H_n(w) = \sum_{k=2}^{n} (E[F_k/A_{k-1}] \ominus \hat{F}_{k-1}(w)), n \geqslant 2, w \notin N$$

$H_1(w) = \{0\}, w \notin N$

证明 若定理假设成立，则易知实值过程族$\{\sigma(x^*, F_n); n \geqslant 1\}(x^* \in X^*)$的Doob分解式满足定理4.6.6条件(1)、(2)，因此$\{F_n, n \geqslant 1\}$存在Doob分解. 下面证明分解具有所述形式，分三步：

(1) $\{H_n, n \geqslant 1\}$显然是$\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$上的零初值可料过程. 又因$\{F_n, n \geqslant 1\}$是集值下鞅，故$F_{k-1} \subset E[F_k/A_{k-1}]$，则有

$$0 \in E[F_k/A_{k-1}] \ominus \hat{F}_{k-1}, k \geqslant 2$$

因此

$$H_{k-1} \subset H_{k-1} + (E[F_k/A_{k-1}] \ominus \hat{F}_{k-1}) = H_k, k \geqslant 2$$

即$\{H_n, n \geqslant 1\}$是集值增过程.

(2) 下面证明$\{G_n, n \geqslant 1\}$为集值鞅. 首先，由于$\{F_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$，故$F_k - E[\hat{F}_k/A_{k-1}] \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$，从而$G_n \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X](n \geqslant 1)$. 由$G_n$的构造，为证$\{G_n, n \geqslant 1\}$为集值鞅，仅需证明任给$n \geqslant 1$，

$$E[F_n \ominus E[\hat{F}_n/A_{n-1}]/A_{n-1}] = \{0\}$$

因为显然$E[\hat{F}_n/A_{n-1}] = -E[F_n/A_{n-1}]$，而依假设

$$\sigma(x^*,F_n)-\sigma(x^*,E[F_n/A_{n-1}])$$

为 X^* 上凸函数，故由引理 4.6.1 知

$$F_n=(F_n\ominus E[\hat{F}_n/A_{n-1}])+E[F_n/A_{n-1}]$$

在上述两端关于 A_{n-1} 同时取条件期望，则有

$$E[F_n/A_{n-1}]=E[F_n\ominus E[\hat{F}_n/A_{n-1}]/A_{n-1}]$$
$$+E[F_n/A_{n-1}]$$

于是由推论 1.4.1 知

$$E[F_n\ominus E[\hat{F}_n/A_{n-1}]/A_{n-1}]=\{0\}$$

即证 $\{G_n,n\geqslant 1\}$ 为集值鞅.

(3) 最后证明 $F_n=G_n+H_n$ a.e. $(n\geqslant 1)$. 用归纳法，当 $n=1$ 时，显然成立. 假设 $n=k$ 时成立，当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}G_{k+1}+H_{k+1}&=(G_k+H_k)+(F_{k+1}\ominus E[\hat{F}_{k+1}/A_k])\\&\quad+(E[F_{k+1}/A_k]\ominus\hat{F}_k)\\&=(F_{k+1}\ominus E[\hat{F}_{K+1}/A_k])\\&\quad+(E[F_{k+1}/A_k]\ominus\hat{F}_k)+F_k=F_{k+1}\end{aligned}$$

其中最后一个等式连用两次引理 4.6.1(1)、(3) 的等价性即得.

最后我们考虑一维空间 R^1 上的集值下鞅的 Doob 分解. 由定理 4.6.2 知在一维情形下经典的 Riesz 分解依然成立，但对于 Doob 分解却不尽然.

引理 4.6.2 设 $F:\Omega\to\mathbf{P}_{kc}^1(R^1)$ 为集值映射，则 F 可表示为 $F(w)=[\zeta(w),\eta(w)],\zeta(w)\leqslant\eta(w),w\in\Omega$，且

(1) F 可测当且仅当 ζ；η 均可测；

(2) $F \in \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega;R^1]$ 当且仅当 $\zeta,\eta \in \mathbf{L}^1[\Omega;R]$;

(3) 若 $F \in \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega;R^1]$,$\mathbf{A}_0$ 为 $\mathbf{A}$ 的子 σ 一代数,则

$$E[F/A_0] = [E[\zeta/A_0],E[\eta/A_0]];$$

(4) $\{F_n,n \geqslant 1\}$ 为集值下(上)鞅当且仅当 $\{\zeta_n,n \geqslant 1\}$ 为实值上(下)鞅,而 $\{\eta_n,n \geqslant 1\}$ 为实值下(上)鞅.

证明 由第二章、第四章知识易证.

现在给定集值下鞅 $\{F_n = [\zeta_n,\eta_n],n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega;R^1]$,且实值上鞅 $\{\zeta_n,n \geqslant 1\}$ 和实值下鞅 $\{\eta_n,n \geqslant 1\}$ 分别有Doob分解如下:

$$\zeta_n = m_\zeta(n) - a_\zeta(n),\eta_n = m_\eta(n) + a_\eta(n),n \geqslant 1$$

其中

$$m_\zeta(n) = \sum_{k=2}^{n}(\zeta_k - E[\zeta_k/\mathbf{A}_{k-1}]) + \zeta_1,n \geqslant 2,m_\zeta(1) = \zeta_1$$

$$m_\eta(n) = \sum_{k=2}^{n}(\eta_k - E[\eta_k/\mathbf{A}_{k-1}]) + \eta_1,n \geqslant 2,m_\eta(1) = \eta_1$$

为实值鞅,而

$$a_\zeta(n) = \sum_{k=2}^{n}(E[\zeta_k/\mathbf{A}_{k-1}] - \zeta_{k-1}),n \geqslant 2,a_\zeta(1) = 0$$

$$a_\eta(n) = \sum_{k=2}^{n}(E[\eta_k/\mathbf{A}_{k-1}]) - \eta_{k-1}),n \geqslant 2,a_\eta(1) = 0$$

为零初值可料增过程.

定理 4.6.9 设 $\{F_n = [\zeta_n,\eta_n],n \geqslant 1\} \subset \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega;R^1]$ 为集值下鞅,则下列命题等价:

(1) $\{F_n,n \geqslant 1\}$ 存在Doob分解;

(2) 任给 $n \geqslant 1,m_\zeta(n) \leqslant m_\eta(n)$ a.e.;

(3) 任给 $n \geqslant 2$，有

$$\sum_{k=2}^{n} E[F_k + \hat{F}_k / \mathbf{A}_{k-1}] \subset \sum_{k=1}^{n} (F_k + \hat{F}_k) \text{ a.e.}$$

证明 先证(1) 与(2) 等价. 定义

$$I_{\lambda>0} = \begin{cases} 1, \lambda \geqslant 0 \\ 0, \lambda < 0 \end{cases}, \qquad I_{\lambda<0} = \begin{cases} 1, \lambda \geqslant 0 \\ 1, \lambda < 0 \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda, F_n) &= I_{\lambda>0}\lambda\eta_n + I_{\lambda<0}\lambda\zeta_n \\ &= I_{\lambda>0}\lambda(m_\eta(n) + a_\eta(n)) + I_{\lambda<0}\lambda(m_\zeta(n) \\ &\quad - a_\zeta(n)) \\ &= \lambda(I_{\lambda>0}m_\eta(n) + I_{\lambda<0}m_\zeta(n)) + \lambda(I_{\lambda>0}a_\eta(n) \\ &\quad - I_{\lambda<0}a_\zeta(n)) \\ &= M_n(\lambda) + A_n(\lambda) \end{aligned}$$

其中 $M_n(\lambda) = \lambda(I_{\lambda>0}m_\eta(n) + I_{\lambda<0}m_\zeta(n))$，$A_n(\lambda) = \lambda(I_{\lambda>0}a_\eta(n) - I_{\lambda<0}a_\zeta(n))$. 显然对于固定的 λ，$\{M_n(\lambda), n \geqslant 1\}$ 为实值鞅，$\{A_n(\lambda), n \geqslant 1\}$ 为零初值可料增过程. 由定理 4.6.6 知 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 存在 Doob 分解当且仅当对于几乎所有的 $w \in \Omega$，$\{M_n(\lambda), n \geqslant 1\}$ 及 $\{A_n(\lambda), n \geqslant 1\}$ 均是 R^1 上的正齐次下半连续凸函数. 它们的正齐次性与下半连续性是显然的，但由于函数 $f(\lambda) = I_{\lambda>0}\lambda a + I_{\lambda<0}\lambda b$ 关于 λ 是凸的当且仅当 $a \leqslant b$，因此知 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 存在 Doob 分解当且仅当 $m_\zeta(n) \leqslant m_\eta(n)$ 且 $-a_\zeta(n) \leqslant a_\eta(n)$ $(n \geqslant 1)$，而 $-a_\zeta(n) \leqslant a_\eta(n)$ 自然成立，即证 (1) 与(2) 等价.

“(1)⇒(3)” 若 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 存在 Doob 分解：

$$F_n = G_n + H_n$$

$(n \geqslant 1)$，其中$\{G_n, n \geqslant 1\}$为集值鞅，$\{H_n, n \geqslant 1\}$为零初值可料增过程，则有

$$\begin{aligned}
& E[F_k + \hat{F}_k / \mathbf{A}_{k-1}] \\
& = E[(G_k + H_k) + (\hat{G}_k + \hat{H}_k) / \mathbf{A}_{k-1}] \\
& \subset E[(G_k + \hat{G}_k) + (H_k + \hat{H}_k) / \mathbf{A}_{k-1}] \\
& = (G_{k-1} + \hat{G}_{k-1}) + (H_k + \hat{H}_k), k \geqslant 2
\end{aligned}$$

因此，可得

$$\sum_{k=2}^{n} E[F_k + \hat{F}_k / \mathbf{A}_{k-1}] \subset \sum_{k=2}^{n} ((G_{k-1} + \hat{G}_{k-1})$$

$$+ (H_k + \hat{H}_k)) \subset \sum_{k=2}^{n} (F_k + \hat{F}_k) \text{ a.e. }, n \geqslant 2$$

“(3)⇒(1)”　在(3)端取支撑函数得

$$\sum_{k=2}^{n} E[\sigma(\lambda, F_k) + \sigma(-\lambda, F_k) / \mathbf{A}_{k-1}]$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} (\sigma(\lambda, F_k) + \sigma(-\lambda, F_k))$$

从而有

$$\sum_{k=2}^{n} (\sigma(\lambda, F_k) - E[\sigma(\lambda, F_k) / \mathbf{A}_{k-1}]) + \sigma(\lambda, F_1)$$

$$\geqslant - (\sum_{k=2}^{n} (\sigma(-\lambda, F_k) - E[\sigma(-\lambda, F_k) / \mathbf{A}_{k-1}] - \sigma(-\lambda, F_1))$$

即知

$$M_n(\lambda) + M_n(-\lambda) \geqslant 0 \text{ a.e. }, (\lambda \in R^1)$$

由上式及$M_n(\lambda)$的正齐次性，利用一维空间的特性易证

$M_n(\lambda)$ 是 R^1 上的凸函数. 此外, 由于 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 为集值下鞅, 故

$$\sum_{k=2}^{n}(F_{k-1}+\hat{F}_{k-1}) \subset \sum_{k=2}^{n} E(F_k+\hat{F}_k/\mathbf{A}_{k-1})$$

从而有

$$\sum_{k=2}^{n}(E[\sigma(\lambda,F_k)/\mathbf{A}_{k-1}]-\sigma(\lambda,F_{k-1}))$$

$$\geqslant -\sum_{k=2}^{n}(E[\sigma(-\lambda,F_k)/\mathbf{A}_{k-1}]-\sigma(-\lambda,F_{k-1}))$$

即

$$A_n(\lambda)+A_n(-\lambda) \geqslant 0 \text{ a. e. } (\lambda \in R^1)$$

类似可证 $A_n(\lambda)$ 为 R^1 上的凸函数. 因此, 由定理 4. 6. 6 知 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 存在 Doob 分解.

下面的例子表明即使在一维情形下, 并不是任何集值下鞅都存在 Riesz 分解.

例 4. 6. 2 设 $\{x_n, n \geqslant 1\}$ 为独立同分布随机变量列, 满足

$$\mu\{x_n=1\}=\mu\{x_n=-1\}=\frac{1}{2}, n \geqslant 1$$

令 $\eta_n=(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2, \zeta_n=-\eta_n$, 则 $\{\eta_n, n \geqslant 1\}$ 为下鞅, $\{\zeta_n, n \geqslant 1\}$ 为上鞅. 则 $\{F_n=[\zeta_n, \eta_n], n \geqslant 1\}$ 为集值下鞅. 但是, 我们有

$$E[\eta_n/\mathbf{A}_{n-1}]=E[\eta_{n-1}+2(\sum_{i=1}^{n-1} x_i)x_n+x_n^2/\mathbf{A}_{n-1}]$$

$$=\eta_{n-1}+1$$

从而

$$\sum_{k=2}^{n} E[F_k + \hat{F}_k / \mathbf{A}_{k-1}]$$

$$= \sum_{k=2}^{n} [-2(\eta_{k-1}+1), 2(\eta_{k-1}+1)]$$

$$= [-2\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k - 2(\eta-1), 2\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k + 2(n-1)]$$

又因

$$\sum_{k=1}^{n}(F_k + \hat{F}_k) = [-2\sum_{k=1}^{n}\eta_k, 2\sum_{k=1}^{n}\eta_k]$$

可见定理 4.6.9 中条件(3)不满足,从而$\{F_n, n \geqslant 1\}$不存在 Doob 分解.

第五章　集值鞅型过程

§5.1　集值鞅型过程的定义

定义5.1.1　设F $=\{F_n, n\geq 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值适应列.

(1)　称**F**是集值鞅,若

$$E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]=F_n, \text{a. e. }, n\geq 1;$$

(2)　称**F**是集值拟鞅,若

$$\sum_{n=1}^{\infty}\triangle(F_n, E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n])<\infty;$$

(3)　称**F**是集值一致 Amart,若

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}\triangle(F_\sigma, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma])=0;$$

(4)　称**F**是集值 Pramart,若

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in(\sigma)}\mu\{\delta(F_\sigma, E[F_m/\mathbf{A}_b])=0 \text{ a. e. };$$

(5)　称**F**是集值 Mil(1),若

$$\lim_{n\geq 1}\sup_{m\geq n}\delta(F_n, E[F_m/\mathbf{A}_n])=0 \text{ a. e. };$$

(6)　称**F**是集值 Mil(2),若

$$\lim_{\sigma\in T}\mu\{\sup_{m\geq\sigma}\delta(F_\sigma, E[F_m/\mathbf{A}_n])>\varepsilon\}=0, \varepsilon>0;$$

(7)　称**F**是集值 Mil(3),若

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{m\geq\sigma}\mu\{\delta(F_\sigma, E[F_m/\mathbf{A}_\sigma])>\varepsilon\}=0, \varepsilon>0;$$

(8)　称**F**是集值 GFT(1),若

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{\sup_{m\geq n}\delta(F_n, E[F_m/\mathbf{A}_n]) > \varepsilon\} = 0, \varepsilon > 0;$$

(9) 称 $\mathbf{F}$ 是集值 GFT(2)，若

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geq n}\mu\{\delta(F_n, E[F_m/\mathbf{A}_n]) > \varepsilon\} = 0, \varepsilon > 0;$$

(10) 称 $\mathbf{F}$ 是集值 EM，若

$$\mu\{w, E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n] \neq F_n \text{ i. o.}\} = 0;$$

(11) 称 $\mathbf{F}$ 是集值 QEM，若

$$\sum_{n=1}^{\infty}\delta(F_n, E[F_{n+1}/\mathbf{A}_n]) < \infty \text{ a. e. };$$

(12) 称 $\mathbf{F}$ 是 L^1- Mil，若

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geq n}\triangle(F_n, E[F_m/\mathbf{A}_n]) = 0;$$

(13) 称 $\mathbf{F}$ 是集值 Amart(1)，若存在 $A \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，使有

$$\lim_{\tau\in T}\delta(EF_\tau, A) = 0$$

其中 $EF_\tau = \text{cl}\int_\Omega F_\tau d\mu$.

［注］ Amart 是 Asymptotic Martingale 的缩写，中译名为渐近鞅. Pramart 是 Amart in probability 的缩写，中译名为依概渐近鞅，Mil 是 Martingale in the limit 的缩写，中译名为极限鞅，GFT 是 Game fairer with time 的缩写，中译名为依概极限鞅. EM 是 Eventual Martingale 的缩写，中译名为终鞅. QEM 是 Quasi-eventual Martingale 的缩写，中译名为拟终鞅. 中译名为严加安所定.

如同实值和向量情形，上述鞅型过程之间有如下关系

$$(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(5)$$

$$(5)\Rightarrow(6)\Rightarrow(7)\Rightarrow(9)$$

$$(1)\Rightarrow(10)\Rightarrow(11),(2)\Rightarrow(11)$$

$$(3)\Rightarrow(12)\Rightarrow(9),(3)\Rightarrow(13)$$

$$(6)\Rightarrow(8)\Rightarrow(9)$$

其中大部分关系显然成立，要证明的是：

$$(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(13),\qquad (4)\Rightarrow(5).$$

引理 5.1.1 设实值非负随机变量族$\{f(\sigma,\tau),\sigma\in T,\tau\in T(\sigma)\}$满足下述条件

(1) 对任意的$\sigma\in T$和$\tau\in T(\sigma)$，$f(\sigma,\tau)$为A_σ可测，

(2) 对任意的$\sigma\in T$和$\tau\in T(\sigma)$，

$$f(n,\tau)\chi_{(\sigma=n)}=f(\sigma,\tau)\chi_{(\sigma=n)},$$

(3) 对任意的$\sigma\in T$，$A\in \mathbf{A}_\sigma$，若$\tau_1,\tau_2\in T(\sigma)$，且$A\subset(\tau_1=\tau_2)$，时$f(\sigma,\tau_1)\chi_A=f(\sigma,\tau_2)\chi_A$成立，则下述等价：

(a) $\lim\limits_{\sigma\in T}\sup\limits_{\tau\in T(\sigma)}\mu\{f(\sigma,\tau)>\varepsilon=0,\varepsilon>0,$

(b) $\lim\limits_{\sigma T}\mu\{\operatorname{esup}\limits_{\tau\in T(\sigma)}f(\sigma,\tau)>\varepsilon\}=0,\varepsilon>0,$

(c) $\lim\limits_{\sigma\in T}\operatorname{esup}\limits_{\tau\in T(\sigma)}f(n,\tau)=0$, a.e..

引理的证明见[33]的 Th. I. 3. 5. 5.

定理 5.1.1 设$\mathbf{F}=\{F_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{kc}[\Omega;X]$值适应列，则下述等价：

(1) $\mathbf{F}$是集值 Pramart；

(2) $\mathbf{F}$满足

$$\lim_{\sigma\in T}\mu\{\operatorname{esup}_{\tau\in T(\sigma)}\delta(F_n,E[F_\tau/\mathbf{A}_n])>\varepsilon\}=0,\varepsilon>0;$$

(3) **F** 满足

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{esup}_{\tau\in T(n)} \delta(F_n, E[F_\tau/\mathbf{A}_n]) = 0 \text{ a.e.}.$$

证明 对任给的$\sigma\in T,\tau\in T(\sigma)$，易证$F_\tau\in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，令

$$f(\sigma,\tau) = \delta(F_\sigma, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma])$$

由引理 4.2.3 和定理 2.4.7 易于验证$\{f(\sigma,\tau),\sigma\in T,\tau\in T(\sigma)\}$满足上述引理5.1.1的条件，于是由引理5.1.1知结论成立，证毕.

推论 5.1.1 设$\mathbf{F}=\{F_n,n\geqslant 1\}$是集值Pramart，则$\mathbf{F}$是集值Mill(1)，即定义 5.1.1 中的"(4)⇒(5)"成立.

定理 5.1.2 设$\{\mathbf{F}=\{F_n,n\geqslant 1\}\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值拟鞅，则$\mathbf{F}$是一致 Amart.

证明 对任意的$j\geqslant 1,\sigma\in T(j),\tau\in T(\sigma)$，如同向量值情形的证明(见引理 4.4.3 的证明)可证

$$E(\delta(F_n, E[F_\tau/\mathbf{A}_n])\chi_{(\sigma=n)}$$

$$\leqslant \sum_{i\geqslant n} E(\delta(F_i, E[F_{i+1}/\mathbf{A}_i])\chi_{(\sigma=n)}$$

于是有

$$\triangle(F_\sigma, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma])$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} E(\delta(F_n, E[F_\tau/\mathbf{A}_n])\chi_{(\sigma=n)})$$

$$\leqslant \sum_{n\geqslant j}\sum_{i\geqslant n} E(\delta(F_i, E[F_{i+1}/\mathbf{A}_i])\chi_{(\sigma=n)})$$

$$\leqslant \sum_{i\geqslant j} E(\delta(F_i, E[F_{i+1}/\mathbf{A}_i]))$$

$$= \sum_{i \geqslant j} \triangle(F_i, E[F_{i+1}/\mathbf{A}_i]) \to 0, j \to \infty$$

定理得证.

定理 5.1.3 设 $\mathbf{F} = \{F_n, n \geqslant 1\}$ 是集值一致 Amart，则 $\mathbf{F}$ 是集值 Amart(1).

证明 设 $\mathbf{F}$ 是集值一致 Amart，对任意的 $\tau \in T(\sigma)$，$\sigma \in T$，由定理 2.4.7 和推论 2.4.5 有

$$\delta(EF_\sigma, EF_\tau) = \delta(EF_\sigma, E(E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma]))$$

$$\leqslant \triangle(F_\sigma, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma]) \to 0, \sigma \in T. \sigma \to \infty$$

于是由 $(\mathbf{P}_{bf}(X), \delta)$ 和 $(\mathbf{P}_{fc}(X), \delta)$ 的完备性（见定理 1.2.9 和 1.2.8）知存在 $A \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，使有

$$\lim_{\tau \in T} \delta(EF_\tau, A) = 0$$

故 $\mathbf{F}$ 是集值 Amart(1)，证毕.

［注］ 若在定义 5.1.1 中分别用 $\delta_u(\cdot, \cdot)$ 或 $\delta_1(\cdot, \cdot)$ 代替其中的 $\delta(\cdot, \cdot)$，则相应地可定义上、下鞅型过程，如在下面的 §5.3 中讨论的集值 Superpramart 就是其中之一.

§5.2 集值一致 Amart 的 Riesz 逼近与收敛性

定理 5.2.1 设 $\mathbf{F} = \{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$ 值一致 Amart，则存在 $\mathbf{L}^1_{fc}(X)$ 值鞅 $\{G_n, n \geqslant 1\}$，使有 $\lim_{\tau \in T} \triangle(F_\tau G_\tau) = 0$.

证明 任取 $n \geqslant 1$，对任意的 $m_1 \geqslant m_2 \geqslant n$，有

$$\triangle(E[F_{m1}/\mathbf{A}_n], E[F_{m2}/\mathbf{A}_n])$$

$$= \triangle(E[E[F_{m1}/\mathbf{A}_{m2}]/\mathbf{A}_n], E[F_{m2}/\mathbf{A}_n])$$
$$\leqslant \triangle(E[F_{m1}/\mathbf{A}_{m2})], F_{m2}) \to 0,$$
$$m_1 \geqslant m_2 \to \infty$$

由此知$\{E[F_m/\mathbf{A}_n], m \geqslant n\}$是$(\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X], \triangle)$中的Cauchy序列，因为$(\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X], \triangle)$是完备的空间(见定理2.3.15)，故必然存在$G_n \in \mathbf{L}^1_{fc}(\Omega;X)$，使有

$$\lim_{m\to\infty} \triangle(E[F_m/\mathbf{A}_n], G_n) = 0$$

这时$G_n \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega, A_n, \mu; X], n \geqslant 1$为显然. 对任意取定的$m, n \geqslant 1$若$m \geqslant n$，由推论2.4.2有

$$\lim_{m\to\infty} \triangle(E[F_{m+k}/\mathbf{A}_n], E[G_m/\mathbf{A}_n])$$
$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \triangle(E[F_{m+k}/\mathbf{A}_m], G_n) = 0$$

因为

$$\triangle(E[G_m/\mathbf{A}_n], G_n)$$
$$\leqslant \triangle(E[G_m/\mathbf{A}_n], E[F_{m+k}/\mathbf{A}_n])$$
$$+ \triangle(E[F_{m+k}/\mathbf{A}_n], G_n), k \geqslant 1$$

令$k \to \infty$即知

$$E[G_m/\mathbf{A}_n] = G_n, \text{a.e.}, m > n \geqslant 1$$

所以$\{G_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值鞅，对任给的$\varepsilon > 0$，由集值一致Amart定义知存在$m_\varepsilon$，使有

$$\triangle(F_m, E[F_{m+k}/\mathbf{A}_m]) < \frac{\varepsilon}{2}, m \geqslant m_\varepsilon, k \geqslant 1$$

对任意取定的$m \geqslant m_\varepsilon$，存在$k_\varepsilon$使有

$$\triangle(E[F_{m+k}/\mathbf{A}_m], G_m) > \frac{\varepsilon}{2}, k \geqslant k_\varepsilon$$

由上述两个不等式可得，$\triangle(F_m,G_m)<\varepsilon,k\geqslant k_\varepsilon$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性即知

$$\lim_{m\to\infty}\triangle(F_m,G_m)=0$$

对任意的 $\tau\in T$，存在 $m\geqslant 1$ 使有 $m\geqslant\tau$，又由集值鞅的 Doob 停止定理知 $\triangle(E[G_m/\mathbf{A}_\tau],G_\tau)=0$，于是有不等式

$$\begin{aligned}\triangle(F_\tau,G_\tau)&\leqslant\triangle(F_\tau,E[F_m/\mathbf{A}_\tau])\\&+\triangle(E[F_m,/\mathbf{A}_\tau],E[G_m/\mathbf{A}_\tau])\\&\leqslant\triangle(F_\tau,E[F_m/\mathbf{A}_\tau])+\triangle(F_m,G_m)\end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{\tau\in T}\triangle(F_\tau,G_\tau)=0$$

定理得证.

引理 5.2.1　设 $\{A_n,B_n,n\geqslant 1\}\subset\mathbf{P}_{fc}(X)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\delta(A_n,B_n)=0$. 则有

(1)　若存在 $B\in\mathbf{P}_{fc}(X)$，使有 $(K.M)B_n\to B,n\to\infty$，则

$$(K.M)A_n\to B,n\to\infty$$

(2)　若存在 $B\in\mathbf{P}_{fc}(X)$，使有 $\|B_n\|\to\|B\|,n\to\infty$，则

$$\|A_n\|\to\|B\|,n\to\infty$$

证明　对任取的 $x\in B$，因 $B\subset s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty}B_n$，故有 $x_n\in B_n,n\geqslant 1$ 使有 $\|x_n-x\|\to 0,n\to\infty$，取 $y_n\in A_n,n\geqslant 1$，使有

$$\|x_n - y_n\| \leqslant d(x_n, A_n) + \frac{1}{n}, n \geqslant 1$$

于是有

$$\|y_n - x\| \leqslant \|y_n - x_n\| + \|x_n - x\|$$

$$\leqslant d(x_n, A_n) + \frac{1}{n} + \|x_n - x\|$$

$$\leqslant \delta(A_n, B_n) + \frac{1}{n} + \|x_n - x\| \to 0, n \to \infty$$

故 $x \in s\text{-}\lim\limits_n A_n$，由 $x \in B$ 的任意性知

$$B \subset s\text{-}\lim_n \inf A_n$$

另一方面，对任取的 $x \in w\text{-}\lim\limits_n \sup A_n$，存在 $x_k \in A_{nk}, k \geqslant 1$，使有 $(w)x_k \to x, k \to \infty$. 取 $y_k \in B_{nk}, k \geqslant 1$，使有

$$\|x_k - y_k\| \leqslant d(x, B_{nk}) + \frac{1}{k}, k \geqslant 1$$

于是对任意的 $x^* \in X^*$，有

$$|<x^*, y_k> - <x^*, x>|$$

$$\leqslant |<x^*, y_k - x_k>| + |<x^*, x_k - x>|$$

$$\leqslant \|x^*\| \cdot \|y_k > -{}_k\| + |<x^*, x_k - x>|$$

$$\leqslant \|x^*\| \delta(A_{nk}, B_{nk}) + \frac{\|x^*\|}{k}$$

$$+ |<x^*, x_{nk} - x>| \to 0, k \to \infty$$

这表明 $(w)y_{nk} \to x$，故 $x \in w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \sup B_n = B$，由

$$x \in w\text{-}\lim_{n\to\infty} \sup A_n$$

的任意性知

$$w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset B$$

故$(K.M)A_n \to B, n \to \infty$. (1) 得证.

(2) 由定理 1.2.4 不难验证有

$$\begin{aligned}&|\,\|A_n\| - \|B\|\,| \\ &\leqslant \delta(A_n,B_n) + |\,\|B_n\| - \|B\|\,| \to 0, n \to \infty\end{aligned}$$

故(2) 成立,引理证毕.

引理 5.2.2 设$\{A_n,B_n,n\geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{bfc}(X)$, $\lim_{n\to\infty}\delta(A_n,B_n) = 0$. 若存在 $B \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$ 使有$(w)B_n \to B, n \to B, n \to \infty$, $(w)A_n \to B, n \to \infty$.

证明 对任意的 $x^* \in X^*$,由定理 1.4.9 有

$$\begin{aligned}&|\sigma(x^*,A_n) - \sigma(x^*,B)| \\ &\leqslant \delta(A_n,B_n) + |\sigma(x^*,B_n) - \sigma(x^*,B)| \to 0\end{aligned}$$

证毕.

定理 5.2.2 设$\{F_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值一致 Amart, $\sup_n E\|F_n\| < \infty$. 若有下列条件之一满足:

(1) X 有 RNP 且 X^* 可分;

(2) 存在 $\mathrm{P}_{wkc}(X)$ 值随机 G 使有

$$E[F_m/\mathbf{A}_n] \subset G, \text{ a.e. }, m \geqslant n \geqslant 1.$$

则存在 $F \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$,使有

$$(K.M)(w)F_n \to F, \|F_n\| \to \|F\| \text{ a.e. }, n \to \infty$$

证明 由定理 5.2.1 知存在 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值鞅$\{G_n,n\geqslant 1\}$使有$\lim_{\tau\in T}\triangle(F_\tau,G_\tau) = 0$. 由此知 $\delta(F_\tau,G_\tau) \to 0(Pr)$. ,从而有

$$\lim_{n\to\infty}\delta(F_n,G_n)=0 \quad \text{a.e.}$$

若定理所述条件之一满足，由第四章的定理 4.3.9 或 4.3.10 即知存在 $F\in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，使有

$$(K.M)(w)G_n\to F$$

$$\text{a.e.},\ n\to\infty$$

$$\|G_n\|\to\|F\|$$

于是由引理 5.2.1 和引理 5.2.2 知有

$$(K.M)(w)F_n\to F$$

$$\text{a.e.},\ n\to\infty$$

$$\|F_n\|\to\|F\|$$

定理得证.

§5.3 无界集值 Superpramart 的收敛性

定义 5.3.1 设 J 是一非空指标集，$\{F_t,t\in J\}$ 是一随机集族，若存在 $\mathbf{P}_{f(c)}(X)$ 值随机集 G 满足：

(1) $t\in J, F_t\subset G$; a.e.

(2) 对任意满足上述(1) 的 $\mathbf{P}_{f(c)}(X)$ 值随机集 H，有

$$G\subset H \text{ a.e.}$$

则称 G 是随机集族 $\{F_t,t\in J\}$ 的本性闭(凸) 包，并记作

$G=\mathrm{ecl}\{F_t,t\in J\}$ 或 $G=\mathrm{ecl}_{t\in J}F_t$ ($G=\overline{\mathrm{eco}}\{F_t,t\in J\}$ 或 $G=\overline{\mathrm{eco}}_{t\in J}F_t$)

由定义知，随机集族的本性闭(凸) 包若存在，则是 a.e.

唯一确定的.

定义 5.3.2 设 $M \subset L^1[\Omega, \mathbf{A}, \mu; X]$，$\mathbf{A}_0$ 是 $\mathbf{A}$ 的子 σ 代数，称 M 是 $\mathbf{A}_0$ 可分解的，若对任意的 $f_1, f_2 \in M$ 和 $A \in \mathbf{A}_0$，均有

$$f_1\chi_A + f_2\chi_{A^c} \in M$$

当 M 是 $\mathbf{A}$ 可分解时，简称 M 是可分解的.

$L^1[\Omega, \mathbf{A}, \mu; X]$，及其单点集均为可分的. 任给子 σ 代数 $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{A}$，若 M 是 $\mathbf{A}_2$ 可分解的，则 M 是 $\mathbf{A}_1$ 可分解的.

定义 5.3.3 设 $M \subset L^1[\Omega, \mathbf{A}, \mu; X]$ 称包含 M 的最小的 $\mathbf{A}_0$ 可分解闭子集为 M 的 $\mathbf{A}_0$ 可分解包，记作 $(\mathbf{A}_0)\mathrm{de}M$. M 的 A 可分解包，记作 $\mathrm{de}M$.

定理 5.3.1 设 $M \subset L^1[\Omega, \mathbf{A}_0, \mu; X]$，则 $(\mathbf{A}_0)\mathrm{de}M$ 存在.

证明 由于 $L^1[\Omega, \mathbf{A}, \mu; X]$ 本身是 $\mathbf{A}_0$ 可分解的，而任意的多个 $\mathbf{A}_0$ 可分解的闭子集的交显然仍是 $\mathbf{A}_0$ 可分解的闭集，由此知 $(\mathbf{A}_0)\mathrm{de}M$ 存在，证毕.

定理 5.3.2 设 $\mathbf{A}_0$ 是 $\mathbf{A}$ 的子 σ 代数，$M \subset L^1[\Omega, \mathbf{A}_0, \mu; X]$，则

(1) 若 M 是 $\mathbf{A}_0$ 可分解的，则 $\mathrm{cl}MM$，$\overline{\mathrm{co}}M$ 也均是 $\mathbf{A}_0$ 可分解的，

(2) $(\mathbf{A}_0)\mathrm{de}M = \mathrm{cl}\{\sum_{i=1}^{n} f_i\chi_{A_i}, f_i \in M, 1 \leqslant i \leqslant n, (A_1, \cdots, A_n)$ 为 $\mathbf{A}_0$ 可测划分$\}$，

(3) $(\mathbf{A}_0)\mathrm{de}M = (\mathbf{A}_0)\mathrm{de}(\mathrm{cl}M)$

(4) 若 M 是闭的，则 M 是 $\mathbf{A}_0$ 可分解的当且仅当

$(\mathbf{A}_0)\mathrm{de}M = M$.

(5) 若 $M \subset L^1(\Omega;X)$ 是可分解的，则

$$\overline{\mathrm{co}}\{E[f/\mathbf{A}_0]:f \in M\} = \mathrm{cl}\{E[f/\mathbf{A}_0]:f \in \overline{\mathrm{co}}M\}$$

证明 类似于集合凸包的相应性质的证明可证明(1)—(4)成立，而(5)为显然.

定理5.3.3 设 $\{F_t, t \in J\}$ 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值随机集族，$S^1_{F_t} \neq \varnothing, t \in J$，则 $\overline{\mathrm{eco}}_{t\in J} F_t$ 存在.

证明 令 $M = \overline{\mathrm{co}}[\mathrm{de}(\bigcup_{t\in J} S^1_{F_t})]$，由定理5.3.2(5)知 M 是可分解的闭凸集，因而由定理2.2.9知存在 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值随机集 F，使有 $S^1_F = M$，这时 F 满足定义5.3.1中的条件(1)为显然，下面证明 F 满足其中的条件(2).

设 H 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值随机集，使有 $F_t \subset H$, a.e., $t \in J$，则

$$S^1_{F_t} \subset S^1_H, t \in J$$

所以有

$$\bigcup_{t\in J} S^1_{F_t} \subset S^1_H$$

成立，于是由可分解包的定义及 S^1_H 的定义及 S^1_H 的凸性即知有

$$M = \overline{\mathrm{co}}[\mathrm{de}(\bigcup_{t\in J} S^1_{F_t})] \subset S^1_H$$

故 $F \subset H$ a.e.，由此知

$$F = \mathrm{e}\,\overline{\mathrm{co}}_{t\in J} F_t$$

定理得证.

引理5.3.1 设 D 是 X 中的可列范稠集，若 $A, B \in$

$\mathbf{P}_f(X)$,则下述等价:

(1) $A \subset B$;

(2) $x \in D, d(x,A) \geqslant d(x,B)$.

证明 "(1)⇒(2)" 为显然,往证"(2)⇒(1)".设(2)成立,对任给的 $x \in A$,存在 $x_k \in D$,使有 $\| x - x_k \| \leqslant \frac{1}{k}, k \geqslant 1$,于是有

$$
\begin{aligned}
0 = d(x,A) &\geqslant \inf_{y \in A} \{ \| x_k - y \| - \| x - x_k \| \} \\
&\geqslant \inf_{y \in A} \| x_k - y \| - \frac{1}{k} \\
&\geqslant \inf_{y \in A} \{ \| x - y \| - \| x - x_k \| \} - \frac{1}{k} \\
&\geqslant d(x,B) - \frac{2}{k}, k \geqslant 1
\end{aligned}
$$

由 $k \geqslant 1$ 的任意性知 $d(x,B) = 0$,即 $x \in B$.由 $x \in A$ 的任意性知(1)成立.引理证毕.

下述定理肯定了一般非空随机集族本性闭(凸)包的存在性,并给出了具体的构造方法.

定理 5.3.4 设 $\{F_t, t \in J\}$ 是一非空随机集族,则

$$\mathrm{ecl}\{F_t, t \in J\}, \mathrm{e}\,\overline{\mathrm{co}}\{F_t, t \in J\}$$

均存在,且有 $\{t_n, n \geqslant 1\} \subset J$,使得

$$\mathrm{ecl}\{F_t, t \in J\} = \mathrm{cl}\{F_{t_n}, n \geqslant 1\}$$

$$\mathrm{e}\,\overline{\mathrm{co}}\{F_t, t \in J\} = \overline{\mathrm{co}}\{F_{t_n}, n \geqslant 1\}$$

证明 设 D 是 X 可列范稠集,对任意取定的 $x_i \in D$,存在 $t_n^i, n \geqslant 1 \subset J$,使有

$$\inf_{n\geq 1} d(x_i, F_{t_n^i}) = \operatorname*{einf}_{t\in J} d(x_i, F_t), \qquad \text{a. e. } (i)$$

其中 a. e. (i) 表示例外集与 x_i 有关. 令

$$J_1 = \{t_n^i, n \geq 1, i \geq 1\}$$

则 J_1 是 J 的可列子集,令 $G = \text{cl}\{F_t, t \in J_1\}$,由定理 2. 1. 11 知 G 是 $\mathbf{P}_f(X)$ 值随机集,对任给的 $s \in J$,任取 $x_i \in D$,有

$$\begin{aligned} d(x_i, F_s) &\geq \operatorname*{einf}_{t\in J} d(x_i, F_t) \\ &= \inf_{n\geq 1} d(x_i, F_{t_n^i}) \\ &\geq \inf_{t\in J_1} d(x_i, F_t), \text{a. e. } (i) \end{aligned}$$

因为 D 是可列集,故存在可略集 N,使有

$$\begin{aligned} d(x, F_s) &\geq \inf_{t\in J_1} d(x_i, F_t) \\ &= d(x, G), w \in \Omega\backslash N, x \in D \end{aligned}$$

于是由上述引理 5. 3. 1 知 $F_s \subset G$, a. e. 又若有另一个 $\mathbf{P}(X)$ 值随机集 H,使有

$$F_t \subset H \text{ a. e. }, t \in J$$

则 $G = \text{cl}\{F_t, t \in J_1\} \subset H$ a. e. 为显然,故

$$G = \text{ecl}\{F_t, t \in J\}$$

再令 $G_1 = \overline{\text{co}}G$,由定理 2. 2. 8 知 G_1 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值随机集,且

$$G_1 = \overline{\text{co}}\{F_t, t \in J_1\}$$

为显然. 若有另一个 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 随机集 H,使有 $F_t \subset H$ a. e. , $t \in J$,则 $G_1 \subset H$ a. e. 亦为显然,故

$$\overline{\text{co}}\{F_t, t \in J_1\} = \text{e}\,\overline{\text{co}}\{F_t, t \in J\}$$

定理证毕.

定义 5.3.4 设 $\mathbf{F}=\{F_n, n\geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{P}_f(X)$ 值适应列，$S_{F_n}^1(\mathbf{A}_n)\neq\varnothing, n\geqslant 1$. 称 $\{f_n, n\geqslant 1\}\subset\mathbf{L}^1[\Omega;X]$ 是 $\mathbf{F}$ 的适应选择，若

$$f_n\in S_{F_n}^1(\mathbf{A}_n), n\geqslant 1$$

我们将 $\mathbf{F}$ 的适应可积选择全体记作 AIS($\mathbf{F}$) 或 AIS($<F_n>$). 若 $\{f_n, n\geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{F}$ 的适应可积选择，记作 $<f_n>\in$ AIS($\mathbf{F}$)

引理 5.3.2 我们假定设 $\mathbf{F}=\{F_n, n\geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值适应列，$S_{F_n}^1(\mathbf{A}_n)\neq\varnothing, n\geqslant 1$，则

$$S_{F_\tau}^1(\mathbf{A}_\tau)=\{f_\tau: <f_n>\in \mathrm{AIS}(\mathbf{F})\}, \tau\in T$$

证明 $\{f_\tau, <f_n>\in \mathrm{AIS}(\mathbf{F})\}\subset S_{F_\tau}^1(\mathbf{A}_\tau)$ 是显然的，对于任给的 $f\in S_{F_\tau}^1(\mathbf{A}_\tau)$，取 $<g_n>\in$ AIS($\mathbf{F}$)，令

$$f=g_n\chi_{(\tau\neq n)}+f\chi_{(\tau=n)}, n\geqslant 1$$

则 $<f_n>\in$ AIS($\mathbf{F}$)，且显然有

$$f=\sum_{n\geqslant 1}f\chi_{(\tau=n)}=\sum_{n\geqslant 1}(g_n\chi_{(\tau\neq n)}+f\chi_{(\tau=n)})\chi_{(\tau=n)}$$

$$=\sum_{n\geqslant 1}f_n\chi_{(\tau=n)}=f_\tau$$

故 $f\in\{f_\tau, <f_n>\in \mathrm{AIS}(\mathbf{F})\}$. 由 $f\in S_{F_\tau}^1(\mathbf{A}_\tau)$ 的任意性知

$$S_{F_\tau}^1(\mathbf{A}_\tau)\subset\{f_\tau, <f_n>\in \mathrm{AIS}(\mathbf{F})\}$$

引理得证.

定理 5.3.5 设 $\mathbf{F}=\{F_n, n\geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega;X]$ 值适应列，若

$$G_n = \underset{\tau \in T(n)}{\mathrm{e}\,\overline{\mathrm{co}}}\ E(F_\tau | \mathbf{A}_n), n \geqslant 1$$

则$\{G_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{P}_{fc}(X)$值上鞅，且$F_n \subset G_n$ a.e.，$n \geqslant 1$. 又若有另一个$\mathbf{P}_{fc}(X)$值上鞅，$\{G_n, n \geqslant 1\}$使有$F_n \subset G_n$ a.e.，$n \geqslant 1$，则

$$G_n \subset G_n \text{ a.e.}, n \geqslant 1$$

若$\sup\limits_T E\|F_\tau\| < \infty$，则$\{G_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$值上鞅，且

$$\sup_{n\to\infty} E\|G_n\| \leqslant \sup_T E\|F_\tau\| < \infty$$

证明 $F_n \subset G_n$ a.e.，$n \geqslant 1$为显然，为证$\{G_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{P}_{fc}(X)$值上鞅，令

$$M_n = \bigcup_{\tau \in T(n)} S^1_{E(F_\tau/\mathbf{A}_n)}(\mathbf{A}_n), n \geqslant 1$$

对每一个$n \geqslant 1$，下面证明M_n是$\mathbf{A}_n$可分解的. 对任意的$f_1, f_2 \in M_n$和$A \in \mathbf{A}_n$，存在$\tau_1, \tau_2 \in T(n)$，$g_1 \in S^1_{F_{\tau_1}}(\mathbf{A}_{\tau_1})$，$g_2 \in S^1_{F_{\tau_2}}(\mathbf{A}_{\tau_2})$，使得

$$f_1 = E[g_1/\mathbf{A}_n], f_2 = E[g_2/\mathbf{A}_n] \quad \text{a.e.}$$

由引理5.3.2知存在$(<h_n^{(1)}>, <h_n^{(2)}>) \subset \mathrm{AIS}(\mathbf{F})$，使有

$$g_i = h_{\tau_i}^{(i)}, i = 1, 2$$

令

$$\sigma = \begin{cases} \tau_1, & w \in A \\ \tau_2, & w \in A^c \end{cases}$$

则$\sigma \in T(n)$. 令$h_n = h_n^{(1)}\chi_A + h_n^{(2)}\chi_{A^c}, n \geqslant 1$，则

$$h_\sigma \in S^1_{F_\sigma}(\mathbf{A}_\sigma)$$

且有

$$E[h_\sigma/\mathbf{A}_n] = E[h_\sigma^{(1)}\chi_A + h_\sigma^{(2)}\chi_{A^c}/(\mathbf{A}_n]$$

$$= E[h_{\tau_1}^{(1)}\chi_A + h_{\tau_2}^{(2)}\chi_{A^c}/\mathbf{A}_n]$$

$$= f_1\chi_A + f_2\chi_{A^c}, \text{a. e.}$$

由此知$f_1\chi_A + f_2\chi_{A^c} \in S^1_{E[F_\sigma/\mathbf{A}_n]}(\mathbf{A}_n) \supset M_n$，故$M_n$是$\mathbf{A}_n$可分解的，于是由定理 5.3.3 和定理 5.3.2 知有

$$S^1_{G_n}(\mathbf{A}_n) = \overline{\text{co}}\{(\mathbf{A}_n)\text{de}[\bigcup_{\tau\in T(n)} S^1_{E[F_\tau/\mathbf{A}_n]}(\mathbf{A}_n)]$$

$$= \overline{\text{co}}M_n, n \geqslant 1$$

对任给的$f \in M_n$，存在$\tau \in T(n)$，$g \in S^1_{F_\tau}(\mathbf{A}_\tau)$，使有$f \underset{\text{a.e.}}{=} E[g/\mathbf{A}_n]$，从而有

$$E[f/\mathbf{A}_{n-1}] = E[g/\mathbf{A}_{n-1}] \in \overline{\text{co}}M_{n-1} = S^1_{G_{n-1}}(\mathbf{A}_{n-1})$$

故由定理 5.3.2(5) 有

$$S^1_{E[G_n/\mathbf{A}_{n-1}]}(\mathbf{A}_{n-1}) = \text{cl}\{E[f/\mathbf{A}_{n-1}], f \in \overline{\text{co}}M_n\}$$

$$= \overline{\text{co}}\{E[f/\mathbf{A}_{n-1}], f \in M_n\}$$

$$\subset S^1_{G_{n-1}}(\mathbf{A}_{n-1}), n \geqslant 1$$

由此可知$E[G_n/\mathbf{A}_{n-1}] \subset G_{n-1}$, a. e. , $n \geqslant 1$，所以有$\{G_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{P}_{fc}(X)$值上鞅. 若有另一个$\mathbf{P}_{fc}(X)$值上鞅$\{G'_n, n \geqslant 1\}$使有$F_n \subset G'_n$ a. e. , $n \geqslant 1$，则

$$G_n = \underset{\tau\in T(n)}{\text{e}\,\overline{\text{co}}}\, E[F_\tau/\mathbf{A}_n]$$

$$\subset \underset{\tau\in T(n)}{\text{e}\,\overline{\text{co}}}\, E[G'_\tau/\mathbf{A}_n] \subset G'_n, \text{a. e.}, n \geqslant 1$$

为显然，又若$\sup_T E\|F_\tau\| < \infty$，则对任意取定的$n \geqslant 1$，有

$$\|G_n\| = \|\underset{\tau\in T(n)}{\text{e}\,\overline{\text{co}}}\, E[F_\tau/\mathbf{A}_n]\|$$

$$\leqslant \operatorname*{esup}_{\tau\in T(n)} \| E[F_\tau/\mathbf{A}_n] \|$$

$$\leqslant \operatorname*{esup}_{\tau\in T(n)} E[\| F_\tau \| /\mathbf{A}_n]$$

这时存在$\{(\tau_i^n, i \geqslant 1\} \subset T(n)$，使有

$$\sup_{i\geqslant 1} E[\| F_{\tau_i^n} \| /\mathbf{A}_n] = \operatorname*{esup}_{\tau\in T(n)} E[\| F_\tau \| /\mathbf{A}_n]$$

且不失一般性可设$E[\| F_{\tau_i^n} \| /\mathbf{A}_n] \uparrow (i\uparrow)$，于是由Fatou引理有

$$E\| G_n \| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E\| F_{\tau_i^n} \|$$

$$\leqslant \sup_T E\| F_\tau \| < \infty, n \geqslant 1$$

定理证毕.

［注］　在上述定理条件下，$\{G_n, n\geqslant 1\}$是包含$\{F_n, n\geqslant 1\}$的最小上鞅. 借用实值情形的名词，可称$\{G_n, n\geqslant 1\}$是$\{F_n, n\geqslant 1\}$的Snell包.

引理 5.3.3　设$\{A_i, i\geqslant 1\} \subset 2^X\backslash\Phi, B \in \mathbf{P}_{lwkc}^{-}(X)$，则有

$$\sup\{d(y,B), y \in \overline{\mathrm{co}}(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i)\} = \sup_{i\geqslant 1} \delta_i(A_i, B)$$

证明　只要证明

$$\sup\{d(y,B); y \in \overline{\mathrm{co}}(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i)\} = \sup_{i\geqslant 1} \delta_i(A_i, B)$$

成立即可，对任给的$y \in \mathrm{co}(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i)$，存在$y_i \in A_i, \lambda_i \in R^+, 1\leqslant i \leqslant m$，使有

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, y = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$$

令$a = \max\{\| y \|, d(0,B), \| y_i \|, 1\leqslant i\leqslant m\} + 1$，则

$$d(y,B) = d(y, B\cap \overline{S}(0,a))$$

$$d(y_i,B) = d(y_i, B\cap \overline{S}(0,a)), 1\leqslant i\leqslant m$$

由于 $B \cap \overline{S}(0,a) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 值，于是由 Minimax 定理有

$$d(y,B) = \inf\{\|y-x\|, x \in B \cap \overline{S}(0,a)\}$$

$$= \sup_{x^* \in U^*} \{<x^*, y> - \sigma(x^*, B \cap \overline{S}(0,a))\}$$

$$= \sup_{x^* \in U^*} \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i [<x^*, y_i> - \sigma(x^*, B \cap \overline{S}(0,a))]\}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sup_{x^* \in U^*} [<x^*, y_i> - \sigma(x^*, B \cap \overline{S}(0,a))]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \inf\{\sup_{x^* \in U^*} <x^*, y_i - x>, x \in B \cap \overline{S}(0,a)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i d(y_i, B \cap \overline{S}(0,a))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i d(y_i, B) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} d(y_i, B)$$

故有

$$d(y,B) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} \delta_1(A_i, B) \leqslant \sup_{i \geqslant 1} \delta_1(A_i, B)$$

由 $y \in \mathrm{co}(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i)$ 的任意性即得欲证之不等式，故结论成立，引理得证.

定义 5.3.5 设 $\mathbf{F} = \{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值适应列，$S^1_{F_\pi}(\mathbf{A}_n) \neq \varnothing, n \geqslant 1$，称 $\mathbf{F}$ 是集值 Superpramart，若

$$\lim_{\sigma \in T} \sup_{\tau \in T(\sigma)} \mu\{\delta_u(F_\sigma, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma]) > \varepsilon\} = 0, \varepsilon > 0$$

集值 Superpramart 是集值上鞅和集值 Pramart 的推广.

定理5.3.6 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$值Superpramart，若存在$G \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$，使有$E[F_\tau/\mathbf{A}_n] \subset G$ a.e.，$n \geqslant 1, \tau \in$

$T(n)$，则存在 $F \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$，使有

$$(K.M)F_n \to F \text{ a.e.}, \ n \to \infty$$

证明 令

$$G_n = \mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}_{\tau \in T(n)} E[F_\tau/\mathbf{A}_n],\ n \geqslant 1$$

由定理 5.3.5 知 $\{G_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值上鞅，且有

$$G_n \subset G \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X] \text{ a.e.},\ n \geqslant 1$$

故由定理 4.5.1 知存在 $F \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$，使有

$$(K.M)G_n \to F,\ \text{a.e.},\ n \to \infty$$

这时 $w\text{-}\lim_n \sup F_n \subset w\text{-}\lim_n \sup G_n \subset F$ a.e. 为显然，对任取的 $f \in S^1_F$，注意到

$$d(f,F_n) \leqslant d(f,G_n) + \sup_{y \in G_n} d(y,F_n),n \geqslant 1$$

又因为 $G_n = \mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}_{\tau \in T(n)} E[F_\tau/\mathbf{A}_n], n \geqslant 1$，故由定理 5.3.4 知存在

$$\{\tau_i^n, i \geqslant 1\} \subset T(n), n \geqslant 1$$

使有

$$G_n = \overline{\mathrm{co}}\{E[F_{\tau_i^n}/\mathbf{A}_n], i \geqslant 1\}, n \geqslant 1$$

于是由引理 5.3.3 有

$$\sup_{y \in G_n} d(y,F_n) = \sup_{i \geqslant 1} \delta_1(E[F_{\tau_i^n}/\mathbf{A}_n],F_n]$$
$$\leqslant \operatorname*{esup}_{\tau \in T(n)} \delta_u(F_n, E[F_\tau/\mathbf{A}_n]), n \geqslant 1$$

令

$$f(\sigma,\tau) = \delta_u(F_\sigma, E[F_\tau/\mathbf{A}_n]), \sigma \in T, \tau \in T(\sigma)$$

则 $\{f(\sigma,\tau), \sigma \in T, \tau \in T(\sigma)\}$ 满足引理 5.1.1 中的条件，于是由集值 Superpramart 的定义和引理 5.1.1 有

$$\lim_{n\to\infty}\ \underset{\tau\in T(n)}{\mathrm{esup}}\,\delta_{\kappa}(F_n, E[F_\tau/\mathbf{A}_n]) = 0 \text{ a. e.}$$

而

$$\lim_{n\to\infty} d(f, G_n) = 0 \text{ a. e.}$$

为显然，故有

$$\lim_{n\to\infty} d(f, F_n) = 0 \text{ a. e.}$$

这表明 $f \in s\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} F_n$ a. e.，由 $f \in S_F^1$ 的任意性知有

$$F \subseteq s\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n \text{ a. e.}$$

所以

$$(K.M)F_n \to F \text{ a. e.}, n \to \infty$$

定理得证.

引理 5.3.4 设 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{fc}(X)$，若存在 $H \in \mathbf{P}_{lwkc}(X)$，使有 $A_n \subset H, n \geqslant 1$，则有

$$\liminf_{n\to\infty} d(x, A_n) \geqslant d(x, w\text{-}\limsup_{n} A_n), x \in X$$

证明 可反证之，若结论不成立，存在 $x \in X$，使有

$$a = \liminf_{n\to\infty} d(x, A_n) < d(x, w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

于是存在子列 $\{A_{nk}, k \geqslant 1\}$ 使有

$$a = \lim_{k\to\infty} d(x, A_{nk})$$

这时 $a < \infty$ 为显然，取 $y_k \in A_{nk}, k \geqslant 1$，使有

$$\| x - y_k \| < d(x, A_{nk}) + \frac{1}{k}, k \geqslant 1$$

从而有

$$\| y_k \| \leqslant \| x \| + d(x, A_k) + \frac{1}{k}$$

$$\leqslant \|x\| + 1 + \sup_{k\geqslant 1} d(x, A_{nk}) < \infty, k \geqslant 1$$

令 $b = \|x\| + 1 + \sup_{k\geqslant 1} d(x, A_{nk})$，则上述不等式表明

$$\{y_k, k \geqslant 1\} \subset H \cap \bar{S}(0, b) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$$

由 w 紧性知存在 $\{y_{mk}, k \geqslant 1\} \subset \{y_k, k \geqslant 1\}$ 和 $y \in H \cap \bar{S}(0, b)$，使有

$$(w) y_{mk} \to y, k \to \infty$$

因而 $y \in w\text{-}\limsup_{k\to\infty} A_n$. 但由范数的 w 下半连续性又有

$$\|x - y\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x - y_{mk}\|$$

$$= a < d(x, w\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

这就有了矛盾，故结论成立，证毕.

引理 5.3.5 设 $\{F_n, A_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值 Superpramart，则对于任意的 $\rho \in T$，$\{F_{\rho\wedge n}, \mathbf{A}_{\rho\wedge n}, n \geqslant 1\}$ 仍是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值 Superpramart.

证明 易知 $\{F_{\rho\wedge n}, \mathbf{A}_{\rho\wedge n}, n \geqslant 1\}$ 仍然是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值适应可积列，记 $\{\mathbf{A}_{\rho\wedge n}, n \geqslant 1\}$ 的有界停时全体为 $\mathbf{T}(<\mathbf{A}_{\rho\wedge n}>) \subset \mathbf{T}$. 对任给的 $\varepsilon > 0$，由集值 Superpramart 的定义知存在 $k \geqslant 1$，使有

$$\sup_{\tau\in T(\sigma)} \mu\{\delta_u(F_\sigma, E[F_\tau/\mathbf{A}_n]) > \varepsilon\} < \varepsilon, \sigma \in T(k)$$

任取 $\tau, \sigma \in T(<\mathbf{A}_{\rho\wedge n}>)$，$\tau \geqslant \sigma \geqslant k$ 令，

$$\tau_1 = (\rho \wedge \tau) \vee \kappa, \sigma_1 = (\rho \wedge \sigma) \vee \kappa$$

则 $\tau_1, \sigma_1 \in T$，且 $\tau_1 \geqslant \sigma_1 \geqslant k$. 因为 $(\rho \wedge \sigma < \kappa) = (\rho < \kappa)$，故有

$$\delta_u(F_{\rho\wedge\sigma}, E[F_{\rho\wedge\tau}/\mathbf{A}_{\rho\wedge\sigma}])\chi_{(\rho\wedge\sigma<\kappa)}$$

$$= \delta_u[F_\rho \chi_{(\rho<\kappa)}, E(F_\rho \chi_{(\rho<\kappa)}/\mathbf{A}_{\rho\wedge\sigma})] = 0$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\delta_u(F_{\rho\wedge\sigma}, E[F_{\rho\wedge\sigma}/\mathbf{A}_{\rho\wedge\sigma}]) \\
&= \delta_u(F_{\sigma1}, E[F_{\tau1}/\mathbf{A}_{\sigma1}])\chi_{(\rho\wedge\sigma\geqslant k)} \\
&= \delta_u(F_{\sigma1}, E[F_{\tau1}/\mathbf{A}_{\sigma1}])
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\mu\{\delta_u(F_{\rho\wedge\sigma}, E[F_{\rho\wedge\tau}/\mathbf{A}_{\rho\wedge\tau}]) > \varepsilon\} \\
&\leqslant \mu\{\delta_u(F_{\sigma1}, E[F_{\tau1}/\mathbf{A}_{\sigma1}]) > \varepsilon\} < \varepsilon
\end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知结论成立，引理得证.

定理 5.3.7 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值 Superpramart，若有

(1) $\sup\limits_T Ed(0, F_\tau) < \infty$;

(2) 存在 $H \in \mathbf{P}_{lwkc}(X)$ a.e.，使有 $E[F_\tau/\mathbf{A}_n] \subset H$ a.e.，$n \geqslant 1, \tau \in T(n)$，则存在 $\mathbf{P}_{lwkc}(X)$ 值随机集 $F, S_F^1 \neq \varnothing$，使有$(K.M)F_n \to F$ a.e.，$n \to \infty$.

证明 分两步证明之，先设 $\zeta = \sup\limits_n d(0, F_n) \in \mathbf{L}^1[\Omega; R]$，记

$$B_n^k = \{x \in X, \|x\| \leqslant E(\zeta/\mathbf{A}_n) + k\}, k \geqslant 1, n \geqslant 1$$

则$\{\{B_n^k, n \geqslant 1\}, k \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{fc}^1[\Omega; X]$ 值适应序列族. 令

$$G_n = \mathrm{cl}\{\bigcup_{k\geqslant 1} \mathrm{e}\ \overline{\mathrm{co}}_{\tau\in T(n)}\ E[F_\tau \cap B_\tau^k/\mathbf{A}_n]\}, n \geqslant 1$$

由引理 4.5.5 和给定的条件(2) 有

$$\begin{aligned}
&E[F_\tau \cap B_\tau^k/\mathbf{A}_n] \subset E[F_\tau/\mathbf{A}_n] \cap B_n^k \\
&\subset H \cap B_n^k \in \mathbf{P}_{wkc}(X) \text{ a.e.}, n \geqslant 1
\end{aligned}$$

由此知$G_n \subset H$ a.e.,$n \geqslant 1$. 而G_n为$\mathbf{A}_n$可测的显然. 由引理4.5.7和定理5.3.5有

$$E[G_{n+1}/\mathbf{A}_n]$$

$$=\mathrm{cl}\{\bigcup_{k\geqslant 1} E[\mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}_{\tau\in T_{(n+1)}} E[F_\tau \cap B_\tau^k/\mathbf{A}_{n+1}]/\mathbf{A}_n]\}$$

$$\subset \mathrm{cl}\{\bigcup_{k\geqslant 1} \mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}_{\tau\in T_{(n+1)}} E[F_\tau \cup B_\tau^k/\mathbf{A}_n]\} = G_n \text{ a.e.}, n \geqslant 1$$

故$\{G_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{P}_{fc}(X)$值上鞅,且

$$F_n = \mathrm{cl}(\bigcup_{k\geqslant 1}(F_n \cap B_n^k) \subset G_n \text{ a.e.}, n \geqslant 1$$

因而有

$$\sup_n Ed(0, G_n) \leqslant \sup_n Ed(0, F_n) < \infty$$

由定理4.5.2知存在$\mathbf{P}_{fc}(X)$值随机集$F \subset H$ a.e.,$S_F^1 \neq \varnothing$,使有

$$(K.M)G_n \to F \text{ a.e.}, n \to \infty$$

这时

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup F_n \subset w\text{-}\lim_{n\to\infty}\sup G_n = F \text{ a.e.}$$

为显然. 对任取的$f \in S_F^1$,注意到

$$d(f, F_n) \leqslant d(f, G_n) + \sup_{y\in G_n} d(y, F_n), n \geqslant 1$$

对取定的$n \geqslant 1$,由定理5.3.4的证明知存在$\{\tau_i, i \geqslant 1\} \subset T(n)$,使有

$$\mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}_{\tau\in T_{(n)}} E[F_\tau \cap B_\tau^k/\mathbf{A}_n]$$

$$= \overline{\mathrm{co}}(\bigcup_{i\geqslant 1} E[F_{\tau_i} \cap B_{\tau_i}^k/\mathbf{A}_n])\text{a.e.}, k \geqslant 1$$

于是如同定理5.3.6的证明,由引理5.3.3有

$$\sup_{y \in G_n} d(y,F_n) = \sup_{k \geqslant 1} \sup_{y \in \mathrm{cl}(\bigcup_{i \geqslant 1} E[F_{\tau i} \cap B^k_{\tau i}/\mathbf{A}_n])} d(y,F_n)$$

$$\leqslant \sup_{k \geqslant 1} \sup_{i \geqslant 1} \delta_1(E[F_{\tau i} \cap B^k_{\tau i}/\mathbf{A}_n],F_n)$$

$$\leqslant \operatorname*{esup}_{\tau \in T(n)} \delta_u(E[F_\tau/\mathbf{A}_n],F_n) \to 0 \text{ a.e.}$$

由此知 $d(f,F_n) \to 0$ a.e. ,$n \to \infty$. 这表明 $f \in s\text{-}\liminf_{n \to \infty} F_n$ a.e. ,由 $f \in S^1_F$ 的任意性知 $F \subset s\text{-}\liminf_{n \to \infty} F_n$ a.e. ,所以 $(K.M)F_n \to F$ a.e. ,$n \to \infty$.

对于一般情形,由条件(1) 可得

$$\sup_n d(0,F_n) < \infty \text{ a.e.}$$

$$E[d(0,F_\tau)\chi_{(\tau<\infty)}] < \infty, \tau \in \overline{T}$$

任取 $k \geqslant 1$,令

$$\rho = \inf\{n \geqslant 1, d(0,F_n) > k\}, \inf\varnothing = \infty$$

则 $\rho \in \overline{T}$,由引理5.3.5知$\{F_{\rho\wedge n},\mathbf{A}_{\rho\wedge n},n \geqslant 1\}$ 仍是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值 Superpramart,且有

$$d(0,F_{\rho\wedge n}) \leqslant k + d(0,F_\rho)\chi_{(\rho<\infty)} = \zeta, n \geqslant 1$$

由此知$\sup_n d(0,F_{\rho\wedge n}) \leqslant \zeta \in \mathbf{L}^1[\Omega;R]$,又有

$$E[F_{\rho\wedge\tau}/\mathbf{A}_n] \subset H \text{ a.e.}, n \geqslant 1, \tau \in T(n)$$

故由上述已证之结论知存在 $G^k \subset H$ a.e. ,$S^1_{G^k} \neq \varnothing$,使有

$$(K.M)F_{\rho\wedge n} \to G^k \text{a.e.}, n \to \infty$$

于是在 $A_k = \sup_n d(0,F_n) \leqslant k$ 上有$(K.M)F_n \to G^k$a.e. ,$n \to \infty$,令

$$B_k = A_k \backslash A_{k-1} (A_0 = \varnothing), k \geqslant 1$$

则 $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$ a.e.，令 $F = \sum_{k=1}^{\infty} G^k \chi_{B_k}$，则

$$(K.M)F_n \to F \text{ a.e.}, \quad n \to \infty$$

由引理 5.3.4 和 Fatou 引理有

$$Ed(0,F) \leqslant E(\liminf_{n\to\infty} d(0,F_n)) \leqslant \liminf_{n\to\infty} d(0,F_n) < \infty$$

所以 $S_F^1 \neq \varnothing$，定理证毕.

引理 5.3.6 设 $A,B \in \mathbf{P}_{fc}(X)$，若 B 有界，则有

$$\delta_u(B,A) = \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} [\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,B)] \quad (5.3.1)$$

又若 X^* 为可分，$\{x_i^*, i \geqslant 1\}$ 是 X^* 的可列范稠集，则

$$\delta_u(B,A) = \sup_{i \geqslant 1} [\sigma(x_i^*,A) - \sigma(x_i^*,B)] \quad (5.3.2)$$

证明 设 A 是有界的，类似于定理 1.4.11 的证明可证 (5.3.1) 成立，若 X^* 可分，则由 $\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,B)$ 关于 X^* 的强连续性知(5.3.2) 也成立，若 A 是无界的，则 $\delta_u(B,A) = +\infty$，对于任给的 $k \geqslant 1$，可选取 $x_k \in A$，使有

$$\|x_k\| > k + \|B\|$$

于是相应地存在 $x_k^* \in X^*$，$\|x_k^*\| \leqslant 1$，使有

$$\langle x_k^*, x_k \rangle > k + \|B\|$$

因而有

$$\sigma(x_k^*,A) - \sigma(x_k^*,B) \geqslant \langle x_k^*, x_k \rangle - \|B\| > k$$

由 $k \geqslant 1$ 的任意性知

$$\sup_{\|x^*\| \leqslant 1} [\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,B)] = +\infty$$

故(5.3.1) 成立. 对任给的 $\epsilon > 0$，取 $x_{nk}^* \in \{x_i^*, K \geqslant 1\}$，$n \geqslant 1$，使有

$$\| x_{nk}^* - x_k^* \| < \varepsilon \frac{1}{\| x_k \|}, k \geqslant 1$$

此时有

$$\begin{aligned}\sigma(x_{nk}^*, A) - \sigma(x_{nk}^*, B) &\geqslant \langle x_{nk}^*, x_k \rangle - \| B \| \\ &\geqslant \langle x_{nk}^*, x_k \rangle - \epsilon - \| B \| > k - \epsilon, k \geqslant 1\end{aligned}$$

由 $k \geqslant 1$ 和 $\epsilon > 0$ 的任意性知

$$\sup_{i \geqslant 1} [\sigma(x_i^*, A) - \sigma(x_i^*, B)] = +\infty$$

故(5.3.2)成立,引理得证.

引理 5.3.7 设$\{F_t, t \in J\}$是$\mathbf{P}_{fc}(X)$值随机集族,$S_{F_t}^1 \neq \varnothing, t \in J$. 则对任意的$x^* \in X^*$,有

$$\sigma(x^*, \underset{t \in J}{\mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}} F_t) = \underset{t \in J}{\mathrm{esup}} \sigma(x^*, F_t) \text{ a.e. } (x^*)$$

其中的例外集与x^*有关.

证明 对任意取定的$x^* \in X^*$,由本性上确界的性质知存在$\{S_k, k \geqslant 1\} \subset J$,使有

$$\sup_{k \geqslant 1} \sigma(x^*, F_{sk}) = \underset{t \in J}{\mathrm{esup}} \sigma(x^*, F_t)$$

但是对每一个$k \geqslant 1$,有

$$\sigma(x^*, F_{sk}) \leqslant \sigma(x^*, \underset{t \in J}{\mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}} F_t) \text{ a.e.}$$

为显然,因而存在可略集$N(x^*)$使有

$$\sup_{k \geqslant 1} \sigma(x^*, F_{sk}) \leqslant \sigma(x^*, \underset{t \in J}{\mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}} F_t), w \in \Omega \backslash N(x^*)$$

由此知

$$\underset{t \in J}{\mathrm{esup}} \sigma(x^*, F_t) \leqslant \sigma(x^*, \underset{t \in J}{\mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}} F_t), \text{ a.e. } (x^*)$$

另一方面,由定理 5.3.4 知存在$\{t_k, k \geqslant 1\} \subset J$,使有

$$\overline{\mathrm{co}}\{F_{tk}, k \geqslant 1\} = \underset{t \in J}{\mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}} F_t$$

于是有

$$\sigma(x^*, \underset{t\in J}{\mathrm{e}\,\overline{\mathrm{co}}} F_t) = \sigma(x^*, \overline{\mathrm{co}}\{F_{t_k}, k \geqslant 1\})$$

$$\leqslant \sup_{k\geqslant 1} \sigma(x^*, F_{t_k})$$

$$\leqslant \operatorname*{esup}_{t\in J} \sigma(x^*, F_t) \text{a.e.} (x^*)$$

故欲证之等式成立，引理得证.

引理 5.3.8 设$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$ 值适应列，若

$$G_n = \underset{\tau\in T(n)}{\mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}} E[F_\tau/\mathbf{A}_n], n \geqslant 1$$

则

$$G_\sigma = \underset{\tau\in T(\sigma)}{\mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}} E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma], \sigma \in T$$

证明 对任意给定的$\sigma \in T$，记

$$H(\sigma) = \underset{\tau\in T(\sigma)}{\mathrm{e}\overline{\mathrm{co}}} E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma]$$

要证明$H(\sigma) = G_\sigma$，易知此时有

$$(\sigma = n) \subset (\tau \geqslant n), \tau \in T(\sigma), n \geqslant 1$$

对任意取定的$\tau \in T(\sigma)$和$n \geqslant 1$，存在$m \geqslant 1$，使有$\tau \leqslant m$. 设$(\sigma = n) \neq \varnothing$，显然此时有$n \leqslant m$. 令

$$\rho = \begin{cases} \tau, & w \in (\sigma = n) \\ m, & w \in (\sigma \neq n) \end{cases}$$

则$\rho \in T(n)$，且由引理 4.2.3 有

$$E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma]\chi_{(\sigma=n)} = E[F_\rho/\mathbf{A}_n]\chi_{(\sigma=n)} \subset G_n\chi_{(\sigma=n)}$$

于是由$\tau \in T(\sigma)$的任意性即知

$$H(\sigma)\chi_{(\sigma=n)} \subset G_n\chi_{(\sigma=n)}, n \geqslant 1$$

由此知 $H(\sigma) \subset G_\sigma$. 再证明反向的包含关系也成立，设 $\sigma \leqslant k$，对任意的 $n \leqslant k$ 和 $\tau \in T(n)$，令

$$\rho = \begin{cases} \tau, & w \in (\sigma = n) \\ k, & w \in (\sigma \neq n) \end{cases}$$

则 $\rho \in T(\sigma)$，仍由引理 4.2.3 有

$$E[F_\tau/\mathbf{A}_n]\chi_{(\sigma=n)} = E[F_\rho/\mathbf{A}_\sigma]\chi_{(\sigma=n)} \subset H_{(\sigma)}\chi_{(\sigma=n)}$$

由 $\tau \in T(n)$ 的任意性知

$$G_n\chi_{(\sigma=n)} \subset H(\sigma)\chi_{(\sigma=n)}, n \leqslant k$$

因而有 $G_\sigma \subset H(\sigma)$，故 $G_\sigma = H(\sigma)$，$\sigma \in T$ 成立，引理得证.

定理 5.3.8 设 X^* 可分，$\mathbf{F} = \{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{wkc}(\Omega; X)$ 值适应列，则下述等价：

(1) $\mathbf{F}$ 是集值 Superpramart；

(2) 存在 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值上鞅 $\{G_n, n \geqslant 1\}$，使有 $F_n \subset G_n$，a.e.，$n \geqslant 1$，且

$$\lim_n \delta(F_n, G_n) = 0 \text{ a.e.}$$

证明"(1)⇒(2)" 设(1) 成立，令

$$G_n = \mathrm{e}\,\overline{\mathrm{co}}_{\tau \in T(n)} E[F_\tau/\mathbf{A}_n], n \geqslant 1$$

由定理 5.3.5 知 $\{G_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{P}_{fc}(X)$ 值上鞅，且

$$F_n \subset G_n \text{ a.e.}, n \geqslant 1$$

设 $\{x_i^*, i \geqslant 1\}$ 是 X^* 中的可列范稠集，令

$$\begin{aligned} \varphi_n^i &= \sigma(x_i^*, F_n) \\ \xi_n^i &= \sigma(x_i^*, G_n) \end{aligned} \qquad n \geqslant 1, i \geqslant 1$$

对任意给定的 $\sigma \in T$，由上述引理 5.3.8 和引理 5.3.7 可得

$$\xi_\sigma^i = \sigma(x_i^*, G_\sigma)$$

$$= \sigma(x_i^*, \underset{\tau\in T(\sigma)}{\mathrm{e}\,\overline{\mathrm{co}}}\, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma])$$

$$= \underset{\tau\in T(\sigma)}{\mathrm{esup}}\, \sigma(x_i^*, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma])$$

$$= \underset{\tau\in T(\sigma)}{\mathrm{esup}}\, E[\sigma(x_i^*, F_\tau)/\mathbf{A}_\sigma]$$

$$= \underset{\tau\in T(\sigma)}{\mathrm{esup}}\, E[\varphi_\tau^i/\mathbf{A}_\sigma]\text{a. e. } (x^*)$$

此时存在$\{\tau_n(i), n \geqslant 1\} \subset T(\sigma)$，使有

$$E[\varphi_{\tau n(i)}^*/\mathbf{A}_\sigma] \uparrow \xi_\sigma^i (n \uparrow)$$

于是由引理 5.3.6 有

$$\delta(F_\sigma, G_\sigma) = \delta_u(F_\sigma, G_\sigma)$$

$$= \sup_{i\geqslant 1}(\sigma(x_i^*, G_\sigma) - \sigma(x_i^*, F_\sigma))$$

$$= \sup_{i\geqslant 1}[\underset{\tau\in T(\sigma)}{\mathrm{esup}}\, E[\varphi_\tau^i/\mathbf{A}_\sigma] - \varphi_\sigma^{*}]$$

$$= \sup_{n\geqslant 1}\sup_{i\geqslant 1}[E[\varphi_{\tau n(i)}/\mathbf{A}_\sigma] - \varphi_\sigma^i]$$

$$= \sup_{n\geqslant 1}\sup_{i\geqslant 1}[\sigma(x_i^*, E[F_{\tau n}(i)/\mathbf{A}_\sigma]) - \sigma(x_i^*, F_\sigma)]$$

$$= \sup_{n\geqslant 1}\delta_u(F_\sigma, E[F_{\tau n(i)}/\mathbf{A}_\sigma])$$

且因为 $\delta_u(F_\sigma, E[F_{\tau n(i)}/\mathbf{A}_\sigma]) \uparrow (n \uparrow)$，因而有

$$\lim_{\sigma\in T}\mu\{\delta(F_\sigma, G_\sigma) > \varepsilon\}$$

$$= \lim_{\sigma\in T}\sup_{n\geqslant 1}\mu\{\delta_\mu(F_\sigma, E[F_{\tau n(i)}/\mathbf{A}_\sigma]) > \varepsilon\}$$

$$\leqslant \lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}\mu\{\delta_u(F_\sigma, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma]) > \varepsilon\} = 0, \varepsilon > 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\delta(F_n, G_n) = 0, \text{ a. e.}$$

"(1)⇒(2)" 得证.

"(2)⇒(1)" 设(2) 成立,此时有

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}\mu\{\delta_u(F_\sigma,E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma])>\varepsilon\}$$

$$\leqslant\lim_{\sigma\in T}\mu\{\operatorname*{esup}_{\tau\in T(\sigma)}\delta_u(F_\sigma,E[F_\tau/\mathbf{A}_\tau])>\varepsilon\}$$

$$\leqslant\lim_{\sigma\in T}\mu\{\delta_u(F_\sigma,\operatorname*{e\,\overline{co}}_{\tau\in T(\sigma)}E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma])>\varepsilon\}$$

$$=\lim_{\sigma\in T}\mu\{\delta_u(F_\sigma,G_n)>\varepsilon\}$$

$$=\lim_{\sigma\in T}\mu\{\delta(F_\sigma,G_\sigma)>\varepsilon\}=0,\varepsilon>0$$

这表明 **F** 是集值 Superpramart,故"(2)⇒(1)"得证,定理证毕.

§5.4 集值 Amart 及其收敛性

定义 5.4.1 设 $F,G\in\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$,称

$$\triangle_w(F,G)=\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}E|\sigma(x^*,F)-\sigma(x^*,G)|$$

为 F,G 之间的 Pettis 距离.

由定义易知 Pettis 距离满足距离的三角不等式,即对任意的 $F,G,H\in\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 有

$$\triangle_w(F,G)\leqslant\triangle_w(F,G)+\triangle_w(H,G)$$

当 X^* 可分或 $F,G\in\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$ 时,$\triangle_w(F,G)=0$ 的充要条件是 $F=G$ a.e.

定理 5.4.1 设 $F,G,\in\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$,**F** 是 **A** 的子 σ 代数,则有

(1) $\triangle_w(F,G) \leqslant \delta(S_F^1,S_G^1) \leqslant \triangle(F,G)$,

(2) $\triangle_w(F[F/\mathbf{F}],E[G/\mathbf{F}]) \leqslant \triangle_w(F,G)$,

(3) 若 F,G 均为 $\mathbf{F}$ 可测，则有

$$\sup_{A\in F}\delta(\mathrm{cl}\int_A Fd\mu,\mathrm{cl}\int_A Gd\mu,) \leqslant \triangle_w(F,G)$$

$$\leqslant 4\sup_{A\in F}\delta(\mathrm{cl}\int_A Fd\mu,\mathrm{cl}\int_A Gd\mu).$$

证明 (1),(2) 为显然. 为证(3) 成立，只要注意到对于任意的 $F \in \mathbf{L}^1[\Omega,\mathbf{F},\mu;R]$，均有不等式.

$$\sup_{A\in F}|\int_A fd\mu| \leqslant \int_\Omega |f|d\mu \leqslant 4\sup_{A\in F}|\int_A fd\mu|$$

再运用定理 1.4.11 和定理 2.3.9 即得，证毕.

定理 5.4.2 设 $\mathbf{F} = \{F_n,n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{fc}^1[\Omega;X]$ 值适应列，则下述等价：

(1) $\mathbf{F}$ 是集值 Amart(1),

(2) 对任意的 $A \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n$，存在 $M(A) \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，使有

$$\lim_{\tau\in T}\delta(\mathrm{cl}\int_A F_\tau d\mu,M(A)) = 0$$

且收敛在下述意义下是一致的，即对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\rho \in T$，使有

$$\sup_{\tau\in T(\rho)}\sup_{A\in\mathbf{A}_{(\rho)}}\delta(\mathrm{cl}\int_A F_\tau d\mu,M(A)) \leqslant \varepsilon$$

(3) $\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}\triangle_w(F_\sigma,E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma]) = 0$.

证明 “(1)⇒(2)” 设(1) 成立，任给 $A \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n$，存在 k

$\geqslant 1$，使有 $A \in \mathbf{A}_k$，对任给的 $\varepsilon > 0$，由(1)知存在 $\rho \in T(k)$，使有

$$\delta(\mathrm{cl}\int_\Omega F_\tau d\mu, \mathrm{cl}\int_\Omega F_\sigma d\mu) < \varepsilon, \tau, \sigma \in T(\rho)$$

任取 $\tau, \sigma \in T(\rho)$，存在 $n \geqslant 1$ 使有 $\tau \leqslant n, \sigma \leqslant n$，令

$$\tau_1 = \begin{cases} \tau, w \in A \\ n, w \in A^c \end{cases} \quad \sigma_1 = \begin{cases} \sigma, w \in A \\ n, w \in A^c \end{cases}$$

则 $\tau_1, \sigma_1 \in T(\rho)$，这时有

$$\begin{aligned} &\delta(\mathrm{cl}\int_A F_\sigma d\mu, \mathrm{cl}\int_A F_\tau d\mu) \\ &= \delta(\mathrm{cl}\int_A F_\tau d\mu, + \mathrm{cl}\int_{A^c} F_n d\mu, \mathrm{cl}\int_A F_\sigma d\mu \\ &\quad + \mathrm{cl}\int_A F_n d\mu) \\ &= \delta(\mathrm{cl}\int_\Omega F_{\tau_1} d\mu, \mathrm{cl}\int_\Omega F_{\sigma_1} d\mu) < \varepsilon \end{aligned}$$

由此知 $\{\mathrm{cl}\int_A F_\tau d\mu, \tau \in T\}$ 是 $(\mathbf{P}_{bfc}(X), \delta)$ 中的 Cauchy 族，同时根据 $(\mathbf{P}_{bfc}(X), \delta)$ 的完备性知存在 $M(A) \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，使有

$$\lim_{\sigma \in T} \delta(\mathrm{cl}\int_A F_\tau d\mu, M(A)) = 0$$

再证明收敛的一致性．任取 $A \in \mathbf{A}_\rho$ 和 $\tau \in T(\rho)$，用上述相同方法可证有

$$\delta(\mathrm{cl}\int_A F_\tau d\mu, \mathrm{cl}\int_A F_\sigma d\mu) < \varepsilon, \sigma \in T(\tau)$$

于是由 $\delta(\cdot, \cdot)$ 的三角不等式有

$$\delta(\mathrm{cl}\int_A F_\tau d\mu, M(A)) < \varepsilon + \delta(\mathrm{cl}\int_A F_\sigma d\mu, M(A))$$

令 $\sigma \to \infty$ 可得

$$\delta(\mathrm{cl}\int_A F_\tau d\mu, M(A)) < \varepsilon$$

由 $A \in \mathbf{A}_\rho$ 和 $\tau \in T(\rho)$ 的任意性知有

$$\sup_{\tau\in T_\rho}\sup_{A\in\mathbf{A}(\rho)} \delta(\mathrm{cl}\int_A F_\tau d\mu, M(A)) \leqslant \varepsilon$$

故(2) 成立,"(1)⇒(2)" 得证.

"(2)⇒(1)" 为显然.

"(1)⇒(3)" 设(1) 成立,对任意的 $\sigma \in T, \tau \in T(\sigma)$ 运用(1)⇒(2) 中的证明方法有

$$\triangle_w(F_\sigma, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma])$$

$$= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} E|\sigma(x^*, F_\sigma) - \sigma(x^*, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma])|$$

$$\leqslant 4\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sup_{A\in\mathbf{A}\sigma}|\int_A(\sigma(x^*, F_\sigma) - \sigma(x^*, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma]))d\mu|$$

$$= 4\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sup_{A\in\mathbf{A}\sigma}|\int_A[\sigma(x^*, F_\sigma) - \sigma(x^*, F_\tau)]d\mu|$$

$$\leqslant 4\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sup_{\tau_1,\sigma_1\in T(\sigma)}|\int_\Omega(\sigma(x^*, F_{\sigma_1}) - \sigma(x^*, F_{\tau_1}))d\mu|$$

$$\leqslant 4\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sup_{\tau_1,\sigma_1\in T(\sigma)}|\sigma(x^*, \mathrm{cl}\int_\Omega F_{\sigma_1}, d\mu)$$

$$- \sigma(x^*, \mathrm{cl}\int_\Omega F_{\tau_1} d\mu)|$$

$$= 4\sup_{\tau_1,\sigma_1\in T(\sigma)}, \delta(\mathrm{cl}\int_\Omega F_{\sigma_1} d\mu, \mathrm{cl}\int_\Omega F_{\tau_1} d\mu) \to 0, \sigma \to \infty$$

故“(1)⇒(3)”成立.

“(3)⇒(1)”　设(3)成立,对任给的$\epsilon > 0$,存在$n_\epsilon \geqslant 1$,使有

$$\sup_{\tau\in T(\sigma)} \triangle_w(F_\sigma, E[F_\tau|\mathbf{A}_\sigma]) < \varepsilon, \sigma \in T(n_\varepsilon)$$

任取$\tau, \sigma \in T(n_\epsilon)$,存在$m \geqslant 1$,使有$\sigma \leqslant m, \tau \leqslant m$,于是由$\delta(\cdot,\cdot)$的三角不等式和定理5.4.1有

$$\delta(\mathrm{cl}\int_\Omega F_\sigma d\mu, \mathrm{cl}\int_\Omega F_\tau d\mu)$$

$$\leqslant \delta(\mathrm{cl}\int_\Omega F_\sigma d\mu, \mathrm{cl}\int_\Omega E(F_m/\mathbf{A}_\sigma) d\mu)$$

$$+ \delta(\mathrm{cl}\int_\Omega F_\tau d\mu, \mathrm{cl}\int_\Omega E[F_m/\mathbf{A}_\tau] d\mu)$$

$$\leqslant \triangle_w(F_\sigma E(F_m/\mathbf{A}_\sigma)) + \triangle_w(F_\tau, E(F_\tau/\mathbf{A}_\sigma)) < 2\epsilon$$

由$\epsilon > 0$的任意性和$(\mathbf{P}_{bfc}(X), \delta)$的完备性知(1)成立,(3)⇒(1)得证.定理证毕.

引理5.4.1　设$\{F_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值Amart(1)则对任意的$\rho \in \overline{T}$,$\{F_{\rho\wedge n}, \mathbf{A}_{\rho\wedge n}, n \geqslant 1\}$仍是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值Amart(1).

证明　容易验证$\{F_{\rho\wedge n}, \mathbf{A}_{\rho\wedge n}, n \geqslant 1\}$仍然是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值适应列,记$\mathbf{A}\ \rho \wedge n, n \geqslant 1\}$,则有界停时全体为$T(< \mathbf{A}_{\rho\wedge n} >)$,则$T(< A_{\rho\wedge n} > \subset T$.对任给的$\epsilon > 0$,由定理5.4.2知存在$k \geqslant 1$,使有

$$\sup_{\tau\in T(\sigma)} \triangle_w(F_\sigma, E[F_\tau/\mathbf{A}_\sigma]) < \varepsilon, \sigma \in T(k)$$

任取$\tau, \sigma \in T(< \mathbf{A}_{\rho\wedge n} >)$,$\tau \geqslant \sigma \geqslant k$,令$\tau_1 = (\rho \wedge \tau) \vee k, \sigma_1$

$= (\rho \wedge \tau) \vee k$，则 $\tau_1, \sigma_1 \in T(k), \tau_1 \geqslant \sigma_1$. 如同引理 5.3.5 的证明可证有

$$\triangle_w(F_{\rho\wedge n}), E[F_{\rho\wedge\tau}/\mathbf{A}_{\rho\wedge n}])$$

$$\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\int_\Omega |\sigma(x^*, F_{\rho\wedge\sigma})$$

$$- \sigma(x^*, E[F_{\rho\wedge\tau}/\mathbf{A}_{\rho\wedge\sigma}])|\chi_{(}\rho \wedge \sigma \geqslant k)d\mu$$

$$= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\int_\Omega |\sigma(x^*, F_{\sigma_1})$$

$$- \sigma(x^*, E[F_{\tau_1}/\mathbf{A}_{\sigma_1}])|\chi_{(\rho\wedge\sigma\geqslant k)}d\mu$$

$$\leqslant \triangle_w(F_{\sigma_1}, E[F_{\tau_1}/\mathbf{A}_{\sigma_1}]) < \epsilon$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性得欲证之结论，证毕.

定理 5.4.3 设 X 有 RNP 且 X^* 可分，$\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$ 值 Amart(1)，$\sup\limits_T \|F_\tau\| < \infty$，若存在 $H \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，使有

$$\lim_{\tau\in T}\delta(\int_\Omega F_\tau d\mu, H) = 0$$

则存在 $F \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$ 使有 $(w)F_n \to F$, a.e., $n \to \infty$.

证明 先假设 $\sup\limits_n \|F_n\| \leqslant \xi \in \mathbf{L}^1[\Omega; R]$ a.e. 令 $b = E\xi$. 对任意的 $A \in \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n$，由定理 5.4.2 知存在 $M(A) \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，使有

$$\lim_{\tau\in T}\delta(\int_A F_\tau d\mu, M(A)) = 0$$

对任给的 $A \in \mathbf{A} = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n$，和 $\epsilon > 0$，存在 $B \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n$，使有

$\mu(A\triangle B)<\varepsilon$,这时有

$$\delta\left(\int_A F_\tau d\mu,\int_B F_\tau d\mu\right)<b\cdot\varepsilon$$

从而由 $\delta(\cdot,\cdot)$ 的三角不等式和定理 5.4.2 知存在 $M(A)\in\mathbf{P}_{bfc}(X)$,使有

$$\lim_{\tau\in T}\delta\left(\int_A F_\tau d\mu,M(A)\right)=0,A\in\mathbf{A}.$$

记 $M_\tau(A)=\int_A F_\tau d\mu,A\in\mathbf{A},\tau\in T$,则上式表明

$$\lim_{\tau\in T}\delta(M_\tau(A),M(A))=0,A\in\mathbf{A}$$

于是由定理 5.4.2 和定理 5.4.1 知 $\sigma(x^*,M_\tau(A))$ 在 $U^*=\{x^*\in X^*:\|x^*\|\leqslant 1\}$ 上一致地收敛到 $\sigma(x^*,M(A))$,已知 $\sigma(x^*,M_\tau(A))$ 在 A_τ 上可列可加,从而 $\sigma(x^*,M(A))$ 在 $\mathbf{A}$ 上可列可加,已知 $M(\Omega)=H\in\mathbf{P}_{wkc}(X)$,又

$$M(\Omega)=\mathrm{cl}(M(A)+M(A^c)),A\in\mathbf{A}$$

故 $M(A)\in\mathbf{P}_{wkc}(X)$,所以 $M(\cdot)$ 是 $\mathbf{A}$ 上的 $\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 值测度,且可验证 $M(\cdot)$ 是有界变差(定义 6.1.4)的,而 $M\ll\mu$(定义 6.3.1)为显然. 因为 X 有 RNP 且 X^* 可分,故由定理 6.4.4 即知存在 $F\in\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$ 使有

$$M(A)=\int_A Fd\mu,A\in\mathbf{A}$$

对于任给的 $x^*\in X^*$,由于

$$\sup_n E|\sigma(x^*,F_n)|\leqslant\|x^*\|\cdot\sup_n E\|F_n\|<\infty$$

且

$$E\sigma(x^*,F_\tau)=\sigma\left(x^*,\int_\Omega F_\tau d\mu\right)\to\sigma(x^*,H)$$

由此知$\{\sigma(x^*,F_n),n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1$有界的实值Amart，由实值Amart的收敛性即知$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(x^*,F_n)$a.e.存在，又因为

$$\int_A \sigma(x^*,F_n)d\mu = \sigma(x^*,M_n(A))$$

$$\to \sigma(x^*,M(A)) = \int_A \sigma(x^*,F)d\mu, A\in \mathbf{A}$$

因而有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,F_n) = \sigma(x^*,F) \text{ a.e. } (x^*)$$

其中的例外集与x^*有关，因为$\sup\limits_n \|F_n\| < \infty$ a.e.，且x^*可分，故存在可略集N，使有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(x^*,F_n) = \sigma(x^*,F), w\in \Omega\backslash N, x^*\in X^*$$

即$(w)F_n\to F$ a.e.成立

对于一般情形，对$k\geqslant 1$，令

$$\rho = \inf\{n\geqslant 1, \|F_n\| > k\}, \inf\varnothing = \infty$$

则$\rho\in \overline{T}$，由引理5.4.1知$\{F_{\rho\wedge n},\mathbf{A}_{\rho\wedge n},n\geqslant 1\}$仍是$\mathbf{L}^1_{fr}[\Omega;X]$值Amart(1)，这时有

$$\|F_{\rho\wedge n}\| = \|F_\rho\|\chi_{(\rho\leqslant n)} + \|F_n\|\chi_{(\rho>n)}$$

$$\leqslant k + \|F_\rho\|\chi_{(\rho<\infty)}, n\geqslant 1$$

由此知$\sup\limits_n \|F_{\rho\wedge n}\| \leqslant k + \|F_\rho\|\chi_{(\rho<\infty)}\in \mathbf{L}^1[\Omega;R]$，由上述已证之结论知存在$G^k\in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$使有

$$(w)F_{\rho\wedge n}\to G^k, n\to\infty$$

由此知在$(\sup\limits_n\|F_n\|\leqslant k)$上有$(w)F_n\to G^k$ a.e.，$n\to\infty$. 令

$$A_1 = \{\sup_n \| F_n \| \leqslant 1\}$$

$$A_k = \{k - 1 < \sup_n \| F_n \| \leqslant k\}, k \geqslant 2$$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k = \Omega$a. e. 再令 $F = \sum_{k=1}^{\infty} G^k \chi_{Ak}$，易知 F 是 $\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 值随机集，而

$$(w) F_n \to F \text{ a. e. }, n \to \infty$$

为显然，且由 Fatou 引理有

$$E \| F \| = \int_\Omega \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} \sigma(x^*, F) d\mu$$

$$= \int_\Omega \liminf_{n \to \infty} \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} \sigma(x^*, F_n) d\mu$$

$$= \int_\Omega \liminf_{n \to \infty} \| F_n \| d\mu \leqslant \sup_n E \| F_n \| < \infty$$

故 $F \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$，定理证毕.

定义 5.4.1 设 $\mathbf{F} = \{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$ 值适应列，称 $\mathbf{F}$ 是集值(w)Amart，若存在 $B \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，使有

$$\lim_{\tau \in T} \sigma(x^*, \mathrm{cl} \int_\Omega F_\tau d\mu) = \sigma(x^*, B), x^* \in X^*$$

易知 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega, X]$ 值 Amart(1) 必是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$ 值(w)Amart，但其逆不成立.

定理 5.4.4 设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega; X]$ 值(w)Amart $\sup_n E \| F_n \| < \infty$. 若存在 $\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 值随机集 G 使有 $F_n \subset G$, a. e. , $n \geqslant 1$，则存在 $F \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$ 使有$(w)F_n \to F$ a. e. , $n \to \infty$.

证明　对每一个 $x^* \in X^*$，易知 $\{\sigma(x^*, F_n), n \geq 1\}$ 是实值 $\mathbf{L}^1$ 有界渐近鞅，故

$$\lim_{n\to\infty} \{\sigma(x^*, F_n), \text{a.e.}(x^*)$$

存在，设 D^* 是 X^* 关于 Mackey 拓扑的可列稠集，于是存在可略集 N 使有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(x^*, F_n) \text{ 存在}, x^* \in D^*$$

$$F_n \subset G \in \mathbf{P}_{wkc}(X), w \in \Omega \backslash N$$

从而由引理 4.5.3 知存在 $F \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，a.e.，使有

$$(w) F_n \to F, \text{a.e.}, n \to \infty$$

对任给的 $x^* \in X^*$，易知 $\sigma(x^*, F)$ 是可测函数，记 $D_1^* = D^* \cap U^*$，其中 $U^* = \{x^* \in X^*, \| x^* \| \leq 1\}$，于是对任意的 $x \in X$，由不等式

$$d(x, F) = \sup_{x^* \in D_1^*} < x^*, x > - \sigma(x^*, F)$$

知 $d(x, F)$ 为可测函数，由此知 F 是随机集，又如同上述定理 5.4.3 的证明可证 $E\|F\| < \infty$，故 $F \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega; X]$，定理证毕.

§5.5　集值鞅型序列与 Banach 空间的几何特征

自本世纪 60 年代 Rieffel 等人的开创性工作以来，向量值鞅与鞅型序列已发展为研究 Banach 空间几何结构与分析结构的强有力的工具之一．例如 Banach 空间的可凹性及 Radon-Nikodym 性质(RNP)的鞅刻划，经典的 Choquet 型定

理的鞅证明，Banach 空间的自反性与可分对偶性的渐近鞅刻划以及 Asplaud 算子，Radon-Nikodym 算子的渐近鞅特征等，显示了 Banach 空间上的概率论与其几何结构间的深刻的内在联系．本节的目的是用集值鞅型序列间的相互关系及其收敛性给出 Banach 空间某些性质的概率特征．

定义 5.5.1 设 D 是一定向集，$\{A, A_t, t\in D\}\subset \mathbf{P}_f(X)$，记

$$s\text{-}\lim_D \inf A_t = \{x\in X，存在\ x_t\in A_t, t\in D，使有(s)x_t \to x, t\in D\}$$

$$w\text{-}\lim_D \sup A_t = \{x\in X，存在\ D\ 的共尾子集\ D_1\ 和\ x_t \in A_t, t\in D_1，使有(w)x_t\to x, t\in D_1\}$$

$s\text{-}\lim_D \inf A_t\subset w\text{-}\lim_D \sup A_t$ 为显然．若有

$$s\text{-}\lim_D \inf A_t = A = w\text{-}\lim_D \sup A_t$$

则称$\{A_t, t\in D\}$在 Kuratowski-Mosco 意义下收敛于 A，记作

$$(K.M)A_t\to A, t\in D\ 或(K.M)\lim_{t\in D} A_t = A$$

引理 5.5.1 设 D 是一向右定向集，$\{A_t, t\in D\}\subset \mathbf{P}_{fc}(X)$ 是单调递减的（即对任给的 $t_1, t_2\in D$，若 $t_1\leqslant t_2$，则 $A_{t1}\supset A_{t2}$），则有

(1) $s\text{-}\lim_D \inf A_t = \bigcap_{t\in D} A_t$；

(2) 若 $\bigcap_{t\in D} A_t\neq\varnothing$，则$(K.M)A_t\to \bigcap_{t\in D} A_t$.

证明 (1) $\bigcap_{t\in D} A_t\subset s\text{-}\lim_D \inf A_t$ 为显然，下证反向包含关系也成立，不妨设 $s\text{-}\lim_D \inf A_t\neq\varnothing$，任给 $x\in s\text{-}\lim_D \inf A_t$，易知

有$\lim\limits_{D} d(x,A_t)=0$，若$x\notin\bigcap\limits_{t\in D}A_t$，则存在$t_0\in D$，使有$d(x,A_{t_0})>0$，而$\{d(x,A_t),t\in D\}$是递增的，故有$\lim\limits_{D} d(x,A_t)>0$，这就有了矛盾，因而$x\in\bigcap\limits_{t\in D}A_t$. 由$x\in s-\lim\limits_{D}\inf A_t$的任意性知$s\text{-}\lim\limits_{D}\inf A_t\subset\bigcap\limits_{t\in D}A_t$，结论(1)得证.

(2) 若$\bigcap\limits_{t\in D}A_t\neq\varnothing$，由上述已证的(1)知

$$w\text{-}\lim_{D}\sup A_t\neq\varnothing$$

对任给的$x\in w-\lim\limits_{D}\sup A_t$，存在$D$的共尾子集$D_1$，及$x_t\in A_t$，使有

$$(w)x_t\to x,\ t\in D_1$$

因为Banach空间中的闭凸集是弱闭的，故由$\{A_t,t\in D\}$的单调性知$x\in\bigcap\limits_{t\in D}A_t$，即

$$w\text{-}\lim_{D}\sup A_t\subset\bigcap_{t\in D}A_t$$

于是由上述已证之结论(1)知

$$(K.M)A_t\to\bigcap_{t\in D}A_t,t\in D$$

结论(2)得证，引理证毕.

定义 5.5.2 设$\mathbf{F}=\{F_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值适应列，若存在$B\in\mathbf{P}_{bfc}(X)$，使有$(K.M)\mathrm{cl}\int_\Omega F_\tau d\mu\to B$，则称$\mathbf{F}$是集值$(K.M)$Amart. $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$值Amart(1)是集值$(K.M)$Amart为显然.

引理 5.5.2 设$\mathbf{F}=\{F_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega;X]$值适应列，则$\mathbf{F}$是集值上鞅的充要条件是对任意的$\sigma,\tau\in T$，若$\sigma\leqslant\tau$，有

$$\int_\Omega F_\sigma d\mu \supseteq \int_\Omega F_\tau d\mu$$

证明 "必要性"任取$x^* \in X^*$，$\{\sigma(x^*, F_n), n \geqslant 1\}$是实值上鞅，故由定理 2.3.9 和实值上鞅的停止定理有

$$\begin{aligned}
&\sigma(x^*, \int_\Omega F_\sigma d\mu) \\
&= \int_\Omega \sigma(x^*, F_\sigma) d\mu \geqslant \int_\Omega \sigma(x^*, F_\tau) d\mu \\
&= \sigma(x^*, \int_\Omega F_\tau d\mu), x^* \in X^*
\end{aligned}$$

又由引理 4.5.10 知$\int_\Omega F_\tau d\mu \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，$\tau \in T$，故由分离定理知

$$\int_\Omega F_\sigma d\mu \supseteq \int_\Omega F_\tau d\mu$$

"充分性" 任给 $m > n > 1$ 和 $A \in \mathbf{A}_n$，令

$$\sigma = \begin{cases} n, w \in \mathbf{A} \\ m, w \in \mathbf{A}^c \end{cases}$$

则$\sigma \in T$，$\sigma \leqslant m$，因为

$$\begin{aligned}
\int_A F_n d\mu + \int_{A^c} F_m d\mu = \int_\Omega F_\sigma d\mu \supseteq \int_\Omega F_m d\mu \\
= \int_A F_m d\mu + \int_{A^c} F_m d\mu
\end{aligned}$$

从而有

$$\int_A F_n d\mu \supseteq \int_A F_m d\mu, A \in \mathbf{A}_n$$

由 $A \in \mathbf{A}_n$ 的任意性知

$$E[F_m/\mathbf{A}_n] \subseteq F_n \text{ a.e.}, m > n \geqslant 1$$

故 **F** 是集值上鞅.

定理 5.5.1 设 X 是可分 Banach 空间,则下述等价:

(1) X 是自反的;

(2) 任一 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值上鞅是集值 $(K.M)\Lambda$mart.

证明 "(1) ⇒ (2)" 因 X 是自反的,故 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$. 设 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $L^1_{fc}[\Omega;X]$ 值上鞅,由引理 5.5.2 和引理 4.5.10 有

$$\int_\Omega F_\tau d\mu \subseteq \int_\Omega F_\sigma d\mu \subseteq \int_\Omega F_1 d\mu \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$$

$$\sigma \in T, \tau \in T(\sigma)$$

且因 $N = \{1,2,\cdots\}$ 是 T 的共尾子列,所以

$$\bigcap_{t \in T}\int_\Omega F_t d\mu = \bigcap_{n=1}\int_\Omega F_n d\mu \neq \varnothing$$

于是由引理 5.5.1 知

$$(K.M)\text{cl}\int_\Omega F_\tau d\mu = \int_\Omega F_\tau d\mu \to \bigcap_{t \in T}\int_\Omega F_t d\mu$$

故 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $(K.M)$Amart, "(1)⇒(2)" 成立.

"(2)⇒(1)" 设(2) 成立,为证(1),仅需证明 X 中的任一递减的非空闭凸集列有非空的交. 任取递减集列 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{bfc}(X)$,令

$$F_n(w) = A_n,\ w \in \Omega, \mathbf{A}_n = \sigma(A_1, \cdots, A_n), n \geqslant 1$$

则 $\mathbf{F} = \{F_n, \mathbf{A}_n, n \geqslant 1\}$ 显然是 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值上鞅,且

$$\text{cl}\int_\Omega F_n d\mu = \int_\Omega F_n d\mu = A_n, n \geqslant 1$$

由(2)知 $\mathbf{F}$ 是集值$(K.M)$Amart，故存在 $B \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，使有

$$(K.M)\mathrm{cl}\int_{\Omega} F_{\tau} d\mu \to B$$

从而由引理 5.5.1 知

$$\bigcap_{n\geqslant 1} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{cl}\int_{\Omega} F_n d\mu = \bigcap_{\tau\in T} \mathrm{cl}\int_{\Omega} F_{\tau} d\mu$$

$$= s\text{-}\lim\inf \mathrm{cl}\int_{\Omega} F_{\tau} d\mu = B \neq \varnothing$$

由$\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{bfc}(X)$ 的任意性知(1)成立，“(2)⇒(1)”得证. 证毕.

下述定理 5.5.2 和定理 5.5.3 中的“任一 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值$(K.M)$Amart”和“任一 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值鞅”，不仅指$(K.M)$Amart 和鞅是任意的，且概率空间$(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ 和 $\mathbf{A}$ 的子 σ 代数列$\{\mathbf{A}_n, n \geqslant 1\}$ 也是任意的.

定理 5.5.2 设 X 不含与 l^1 线性同胚的子空间，则下述等价：

(1) X 是有限维的；

(2) 任一 $\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 值$(K.M)$Amart 必是集值 Amart(1).

证明 如同定理 1.5.25 中“(1)⇒(2)”的证明可证“(1)⇒(2)”成立.

“(2)⇒(1)”可反证之，设(2)成立而 X 是无限维的，则存在 X 中的点列$\{x_n, n \geqslant 1\}$，使有 $\| x_n \| = 1, n \geqslant 1$ 且 $\| x_m - x_n \| > 1, m \neq n$. 由于$\{x_n, n \geqslant 1\}$ 有界，而 X 不含与 l^1 线性同

胚的子空间，故由Rosenthal定理知$\{x_n, n \geqslant 1\}$有弱Cauchy子列$\{x_{nk}, k \geqslant 1\}$. 令

$$y_k = x_{nk} - x_{nk-1}, k \geqslant 1$$

显然有$(w) y_n \to 0$. 且 $\| y_n \| > 1, n \geqslant 1$. 定义

$$A_n = \{\alpha y_n; 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}, F_n(w) = A_n, w \in \Omega, n \geqslant 1$$

则F_n可积有界且$F_n(w) = A_n \in \mathbf{P}_k(X), w \in \Omega, n \geqslant 1$，由引理4.5.10知$\int_\Omega F_n d\mu$是闭的，令$\mathbf{A}_n = \sigma(A_1, \cdots, A_n)$，可以证明$\{F_n, \mathbf{A}_n, n \geqslant 1\}$是集值$(K.M)$Amart，对任取的$x^* \in X^*$，因

$$-|\langle x^*, y_n \rangle| \leqslant \sigma(x^*, A_n)$$
$$\leqslant |\langle x^*, y_n \rangle|, n \geqslant 1$$

已知$(w) y_n \to 0, n \to \infty$，所以有$\lim\limits_{n \to \infty} \sigma(x^*, A_n) = 0$. 于是对任给的$\varepsilon > 0$，存在$n_\varepsilon \geqslant 1$，使有$\sigma(x^*, A_n) < \varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$. 从而对于任意的$\tau \in T(n_\beta)$，均有

$$\sigma(x^*, \int_\Omega F_\tau d\mu) = \sigma(x^*, \sum_{n \geqslant n_\varepsilon} \int_{(\tau = n)} F_n d\mu)$$
$$= \sum_{n \geqslant n_\varepsilon} \sigma(x^*, \mu(\tau = n) A_n)$$
$$= \sum_{n \geqslant n_\varepsilon} \sigma(x^*, A_n) \mu(\tau = n) < \varepsilon$$

由$\varepsilon > 0$的任意性知

$$\lim_T \sigma(x^*, \mathrm{cl} \int_\Omega F_\tau d\mu) = 0, x^* \in X^*$$

如同引理4.3.1的证明可证有

$$w\text{-} \lim_T \sup \mathrm{cl} \int_\Omega F_\tau d\mu \subset \{0\}$$

而另一方面，因 $0 \in \mathbf{A}_n$，$n \geqslant 1$，所以有

$$0 \in \sum_{n=\min\tau}^{\max\tau} \mu(\tau = n) A_n = \int_\Omega F_\tau d\mu, \tau \in T$$

故 $\{0\} \subset s\text{-}\liminf_T \mathrm{cl} \int_\Omega F_\tau d\mu$，由此知

$$(K.M)\mathrm{cl} \int_\Omega d\mu \to \{0\} \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$$

即 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是集值 $(K.M)$Amart. 但由 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 的定义易知有

$$\delta(\int_\Omega F_n d\mu, \{0\} > 1, \geqslant 1$$

而 $N = \{1, 2, \cdots\}$ 是 T 的共尾子集，所以有

$$\lim\sup_T \delta(\mathrm{cl} \int_\Omega F_\tau d\mu, \{0\}) \geqslant 1$$

这表明 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 不是集值 Amart(1)，与(2) 矛盾，所以 X 是有限维的，"(2)⇒(1)" 得证，定理证毕.

定理 5.5.3 设 X 为可分的 Banach 空间，则下述等价：

(1) X 是有限维的；

(2) 任一 $\mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$ 值一致可积鞅在 Hausdorff 距离 a.e. 收敛于 $\mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$ 中某一元；

(3) 任一 $\mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$ 值一致可积鞅以 Kuratowski-Mosco 意义下 a.e. 收敛于 $\mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$ 中某一元.

证明 "(1)⇒(2)" 由定理 4.3.10 即得，"(2)⇒(3)" 为显然.

"(3)⇒(1)" 反证之. 设(3) 成立，若(1) 不成立，X 是无限

维的，可分下述两种情形讨论：

(a) 设 X 不具有 RNP，由向量值鞅的理论，知存在向量值鞅 $\{f_n, \mathbf{A}_n, n \geqslant 1\}$，$\{\| f_n \|, n \geqslant 1\}$ 为一致可积，但 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 并不 a.e. 强收敛. 令 $F_n = \{f_n\}$，$n \geqslant 1$，则 $\{F_n, \mathbf{A}_n, n \geqslant 1\}$ 是一致可积的 $\mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$ 值鞅，因对于单点集情形，$(K.M)$ 收敛等价于 X 中的强收敛，所以 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 不可能 a.e. $(K.M)$ 收敛于 $\mathbf{L}^1[\Omega; X] \subset \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$ 中的某一元，这就有了矛盾，所以 X 是有限维的.

(b) 设 X 具有 RNP，若 X 是无限维的，那么可以构造 $(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ 上的有界变差的 μ- 连续的紧凸集值测度 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{kc}(X)$，使得 M 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数 $\frac{dM}{d\mu} \notin \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$，现在设 $\{\pi_n, n \geqslant 1\}$ 是 Ω 和一列有限 $\mathbf{A}$ 可测划分，且 $\pi_n \subset \pi_{n+1}$，$n \geqslant 1$. 令 $\mathbf{A}_n = \sigma(\pi_n)$ 表示由 π_n 张成的子 σ 代数，设 $\mathbf{A}_0 = \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n)$. 定义

$$F_n = \sum_{A \in \pi_n} \frac{M(A)}{\mu(A)} \chi_A, n \geqslant 1$$

则 $\{F_n, \mathbf{A}_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$ 值鞅，且有

$$M(A) = \int_{\Omega} F_n d\mu, A \in \mathbf{A}_n \tag{5.5.1}$$

类似于向量值情形，由集值测度理论（见第六章）可证 $\{F_n, n, n \geqslant 1\}$ 是一致可积的，从而由(3)的假设知存在 $F \in \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega; X]$，使有

$$(K.M) F_n \to F \text{ a.e.}, n \to \infty$$

现在要证明，

$$M(A)\subset\int_A Fd\mu,A\in\mathbf{A}_0 \qquad (5.5.2)$$

对任给的 $n\geqslant 1$ 及 $A\in\mathbf{A}_n$，设 $x\in M(A)$，由(5.5.1)知存在 $f_n\in S^1_{F_n}(\mathbf{A}_n)$，使得 $x=\int_A f_n d\mu$，由定理 4.3.1 知对任给的 $\varepsilon<0$，存在一致可积的向量值鞅 $\{g_n, n\geqslant 1\}$，使有 $E\|f_n-g_n\|<\varepsilon$. 由于 X 具有 RNP，故存在 $g\in\mathbf{L}^1(\Omega,\mathbf{A}_0,\mu,X)$，使有

$$E[g/\mathbf{A}_n]=g_n \text{ a.e.}, \|g_n-g\|\to 0 \text{ a.e.},$$

且 $g\in S^1_F$. 于是有

$$\|x-\int_A gd\mu\| = \|\int_A f_n d\mu-\int_A g_n d\mu\|$$

$$\leqslant\int_A\|f_n-g_n\|d\mu<\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $x\in\int_A Fd\mu$，从而有

$$M(A)\subset\int_A Fd\mu,A\in\mathbf{A}_n, n\geqslant 1 \qquad (5.5.3)$$

对于任意的 $A\in\mathbf{A}_0=\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n)$，由于 $E\|F\|<\infty$，而 M 是 μ 连续的，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $B\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n$，使有

$$\int_{A\triangle B}\|F\|d\mu<\varepsilon, |M|(A\triangle B)<\varepsilon$$

其中 $|M|$ 表示集值测度 M 的变差(见定义 6.1.4)，但由于

$$\begin{aligned}&\delta(M(A),M(B))\\&=\delta(M(A\backslash B)+M(A\cap B),M(B\backslash A)+M(A\cap B))\\&=\delta(M(A\backslash B),M(B\backslash A))\end{aligned}$$

$$= |M|(A\triangle B)$$

由此知$M(A) \subset M(B) + \overline{S}(0,\varepsilon)$，类似地可证有

$$\int_B F d\mu \subset \int_A F d\mu + \overline{S}(0,\varepsilon)$$

从而由(5.5.3)可得

$$M(A) \subset M(B) + \overline{S}(0,\varepsilon)$$

$$\subset \int_B F d\mu + \overline{S}(0,\varepsilon)$$

$$\subset \int_A F d\mu + \overline{S}(0,\varepsilon)$$

由$\varepsilon > 0$的任意性知$M(A) \subset \int_A F d\mu$成立，(5.5.2)得证.

现在由定理6.4.3知存在$G \in \mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，使有

$$M(A) = \mathrm{cl}\int_A G d\mu, \quad A \in \mathbf{A}_0$$

于是有 $$\mathrm{cl}\int_A G d\mu \subset \int_A F d\mu, \quad A \in \mathbf{A}_0$$

但由于$F \in \mathbf{L}^1_{kc}[\Omega;X] \subset \mathbf{L}^1_s[\Omega;X]$，故由定理2.3.16知$G \subset F$ a.e. 因而有$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\mu} = G \in \mathbf{L}^1_{kc}[\Omega;X]$，这就有了矛盾，所以$X$是有限维的. 综合(a)(b)即知(1)成立，“(3)⇒(1)”得证. 定理证毕.

作为本节的结束，可以提出一个值得进一步探讨的问题——超空间的几何结构. 关于超空间的拓扑结构已经有了较深入的结果(§1.3)，但超空间上也存在着某种半线性结构(§1.2)，因而还可以讨论超空间的几何结构，例如可以引入下述定义.

定义5.5.2 称超空间$\mathbf{P}_{kc}(X)$上的有界子集$\mathbf{C}\subset\mathbf{P}_{kc}(X)$是可凹的(dentable),若对任给的$\varepsilon>0$,存在$A\in\mathbf{C}$及正整数$k$,使得对于任意的$\{A_1,\cdots,A_n\}\subset\mathbf{C}$,$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\subset R^+$且

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\delta(A,A_i)>\varepsilon,1\leqslant i\leqslant n$$

有$\delta(A,\sum_{i=1}^{n}\lambda_iA_i)>\frac{1}{k}$.

进一步,能不能通过集值鞅型序列来研究超空间的各种几何性质?例如有问题:

定理5.4.3的两个等价命题是否还等价于

(3)$\mathbf{P}_{kc}(X)$中的任一有界子集是可凹的?

又如由第一章的定理1.2.13知,存在Banach空间$\hat{X}$及等距的同构映射$J:\mathbf{P}_{kc}(X)\to\hat{X}$,使得$J(\mathbf{P}_{kc}(X))$为$\hat{X}$的闭凸锥,自然要问:超空间$\mathbf{P}_{kc}(X)$和Banach空间$X$,$\hat{X}$这三者的几何结构间又有多大程度的相互联系?

诸如此类的一系列问题均有待于进一步的探索.

第六章　集值测度与集值转移测度

§6.1　集值测度

首先研究超空间上无穷级数的性质.

定义6.1.1　设$\{x_n, n \geqslant 1\} \subset X$. 称$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$是收敛的，如果部分和序列$\{\sum_{n=1}^{k} x_n, k \geqslant 1\}$是强收敛的. 称$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$是无条件收敛的，如果对自然数列的每个置换$\pi(n)$，$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$都是收敛的. 那么我们就称$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$是绝对收敛的，如果$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty$.

易知，绝对收敛级数必定无条件收敛，而无条件收敛级数必定收敛. 当且仅当X为有限维时，绝对收敛才等价于无条件收敛(Doretzky-Rogers 定理).

引理6.1.1　设$\{x_n, n \geqslant 1\} \subset X$，则下列条件等价：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$是无条件收敛的；

(2) 任给自然数列的增子列$\{n_i\}$，$\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$收敛；

(3) 任给$\theta_n = \pm 1 (n \geqslant 1)$，$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$收敛；

(4) 任给 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $n \geqslant 1$，使得对任意满足

$$\min\{i, i \in \sigma\} > n$$

的自然数有限子集 σ，恒有 $\|\sum_{i\in\sigma} x_i\| < \varepsilon$.

(5) 对每个有界数列 $\{a_n, n \geqslant 1\}$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛.

证明 见余鑫泰[126].

引理6.1.2 Banach 空间 X 不含与 c_0 同构的子空间当且仅当任意满足 $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n\rangle| < \infty (\forall x^* \in X^*)$ 的级数是无条件收敛的.

引理6.1.3 (Orlicz-Pettis 定理) 我们假定设 $\{x_n, n \geqslant 1\} \subset X$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是无条件收敛的当且仅当任给自然数列的增子列 $\{n_i\}$，$\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ 均是弱收敛的.

证明 见 Diestel[30].

定义6.1.2 设 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_0(X)$，定义集值无穷级数和为：

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in X, \text{存在} x_n \in A_n (n \geqslant 1), \text{使} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{无条件收敛且} x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\}$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\| < \infty$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 绝对收敛. 若任意给定 $x_n \in A_n (n \geqslant 1)$，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 无条件收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 无条件收敛.

容易证明集值无穷级数的下列基本性质：

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} d(0, A_n) < \infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 非空；

(2) 若任给 $n \geq 1$，A_n 是凸的，则 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是凸的；

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 必无条件收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 为非空有界集；

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 无条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 非空.

定理 6.1.1 设 $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathbf{P}_0(X)$，$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 非空，则对任给 $x^* \in X^*$，有 $\sigma(X^*, \sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x^*, A_n)$.

证明 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$，所以存在 $a_n \in A_n (n \geq 1)$，能够使得 $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 无条件收敛. 令 $B_n = A_n - a_n$，则 $0 \in B_n (n \geq 1)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n - a$. 而因为

$$\sigma(x^*, B_n) = \sigma(x^*, A_n) - \langle x^*, a_n \rangle$$

故仅需证明

$$\sigma(x^*, \sum_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x^*, B_n) \tag{6.1.1}$$

显然 $\{\sigma(x^*, B_n), n \geq 1\}$ 及 $\sigma(x^*, \sum_{n=1}^{\infty} B_n)$ 均非负. 任给 $x \in$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$，存在 $x_n \in B_n$，使得 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$（无条件收敛），于是知

$$< x^*, x > = \sum_{n=1}^{\infty} < x^*, x_n > \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x^*, B_n)$$

(6.1.2)

所以有

$$\sigma(x^*, \sum_{n=1}^{\infty} B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x^*, B_n) \qquad (6.1.3)$$

若 $\sigma(x^*, \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = +\infty$，则(6.1.1)得证. 假设 $\sigma(x^*, \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n) < \infty$，我们首先证明

$$\sigma(x^*, B_n) < \infty \quad (n \geqslant 1)$$

假设不然，则必存在 $\{x_n^{(i)}, i \geqslant 1\} \subset B_n$，使得

$$< x^*, x_n^{(i)} > \to +\infty \quad (i \to \infty)$$

由于任给 $n \geqslant 1$，$0 \in B_n$，故知任给 $i \geqslant 1$，$x_n^{(i)} \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$，则

$$\sigma(x^*, \sum_{n=1}^{\infty} B_n) = +\infty$$

矛盾，故证任给 $n \geqslant 1$，$\sigma(x^*, B_n) < +\infty$. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，取 $b_n \in B_n$，使得

$$< \quad , b_n > \geqslant \sigma(x^*, B_n) - 2^{-n} \cdot \varepsilon \qquad (6.1.4)$$

令 $z_m = \sum\limits_{n=1}^{m} b_n (m \geqslant 1)$，则 $z_m \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n (m \geqslant 1)$，且

$$\sigma(x^*, \sum_{n=1}^{\infty} B_n) \geqslant < x^*, z_m >$$

$$= \sum_{n=1}^{m} < x^*, b_n >$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{m} \sigma(x^*, B_n) - \varepsilon \qquad (6.1.5)$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知

$$\sigma(x^*, \sum_{n=1}^{\infty} B_n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x^*, B_n) \qquad (6.1.6)$$

综定(6.1.3)—(6.1.6) 即证(6.1.1) 成立.

定理 6.1.2 设 X 不含与 c_0 同构的子空间(或者是弱序列完备的). 如果 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_0(X)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 为非空有界集, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 无条件收敛.

证明 首先假设 X 不含与 c_0 同构的子空间. 现在我们假设存在 $x_n \in A_n$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不是无条件收敛的, 则依引理 6.1.2 存在 $x_0^* \in X^*$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < x_0^*, x > | = + \infty$$

不妨假定 $< x_0^*, x_n > > 0$ $(n \geqslant 1)$(否则取其子列即可). 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$, 所以存在无条件的收敛列 $\{y_n, n \geqslant 1\}$, 使得 $y_n \in A_n (n \geqslant 1)$, 从而可以证明 $\sum_{n=1}^{\infty} | < x_0^*, y_n > | < \infty$. 任给 $K > 0$, 取正整数 N, 使得:

$$\sum_{n=1}^{N} < x^*, x_n > > K + \sum_{n=1}^{\infty} | < x_0^*, y_n > | \quad (6.1.7)$$

令

$$z_k = \begin{cases} x_k, & k \leqslant N \\ y_k, & k > N \end{cases}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 无条件收敛，且 $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \in \sum_{n=1}^{\infty} A_n$。但依(6.1.7)可得

$$\begin{aligned} \left| < x_0^*, \sum_{n=1}^{\infty} z_n > \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} < x_0^*, z_n > \right| \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{N} < x_0^*, x_n > - \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} < x_0^*, y_n > \right| \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{N} < x_0^*, x_n > - \sum_{n=1}^{\infty} \left| < x_0^*, y_n > \right| \quad (6.1.8) \end{aligned}$$

因此 $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right\| \geqslant \| x_0^* \|^{-1} \cdot K$，从而

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right\| > \| x_0^* \|^{-1} \cdot K$$

与 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 有界矛盾.

当 X 弱序列完备时，若存在 $x_n \in A_n (n \geqslant 1)$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不是无条件收敛的，则依引理 6.1.3 知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不是弱无条件 Cauchy 列，从而存在 $x_0^* \in X^*$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| < x_0^*, x_n > \right| = +\infty$$

类似可证.

定理 6.1.3 设$\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_0(X)$，$A_n$为有界集($n \geqslant 1$)，则下列命题等价：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 无条件收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl} A_n$ 无条件收敛；

(3) 任给自然数增子列$\{n_i\}$，$\{\mathrm{cl}(\sum_{i=1}^{k} A_{n_i}), k \geqslant 1\}$ 依 Hausdorff 距离收敛.

证明 “(1)⇒(2)”任给$x_n \in \mathrm{cl} A_n (n \geqslant 1)$，取$y_n \in A_n$，使得$\| x_n - y_n \| < 2^{-n}$，由于$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$无条件收敛，依引理6.1.1易证$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$无条件收敛，因此$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl} A_n$无条件收敛.

“(2)⇒(3)”用反证法. 假定存在子列$\{n_i\}$，使得$\{\mathrm{cl}(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{cl} A_{n_i}), k \geqslant 1\}$ 不依 Hausdorff 距离收敛，即它不是$(\mathbf{P}_{bf}(X), \delta)$中的 Cauchy 列. 于是存在$\varepsilon > 0$，$\{n_i\}$的增子列$\{n_{i(j)}\}$及正整数列$\{k(j), j \geqslant 1\}$，满足$n_{i(j+1)} > n_{i(j)+k(j)} (\forall\ j \geqslant 1)$，使得任给$j \geqslant 1$，有

$$\| \mathrm{cl}(\sum_{m=1}^{k(j)} A_{ni(j)+m}) \| > \varepsilon \qquad (6.1.9)$$

取$\{x_{ni(j)}, x_{ni(j)+1}, \cdots, x_{ni(j)+k(j)}\}$，$x_{ni(j)+m} \in A_{ni(j)+m} (1 \leqslant m \leqslant k(j))$，使得

$$\| \sum_{m=1}^{k(j)} x_{ni(j)+m} \| > \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6.1.10)$$

考虑如下定义的序列$\{y_n, n \geqslant 1\}$：

$$y_k = \begin{cases} a_k, & k \neq n_{i(j)+m}, j \geqslant 1, 1 \leqslant m \leqslant k(j) \\ x_{ni(j)+m}, & k = n_{i(j)+m}, j \geqslant 1, 1 \leqslant m \leqslant k(j) \end{cases} \quad (6.1.11)$$

其中$a_k \in A_k (k \geqslant 1)$任取，则$y_n \in \mathrm{cl}A_n (n \geqslant 1)$，但$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$不是无条件收敛的，这与(2)矛盾.

“(3)⇒(1)”用反证法，设存在$x_n \in A_n (n \geqslant 1)$，使$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$不是无条件收敛的，则依引理6.1.1(4)知，存在$\varepsilon > 0$，及正整数的有限子集簇$\{\sigma_n, n \geqslant 1\}$，使得

$$q_n = \max\{i, i \in \sigma_n\} < p_{n+1} = \min\{i, i \in \sigma_{n+1}\} \quad (6.1.12)$$

且

$$\| \sum_{i \in \sigma_n} x_i \| > \varepsilon \ (n \geqslant 1)$$

令$\sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$，则$\sigma$为自然数的增子列. 考虑集值序列$\{\mathrm{cl}A_i, i \in \sigma\}$. 由于任给$n \geqslant 1$，有

$$\| \mathrm{cl}(\sum_{i \in \sigma_n} \mathrm{cl}A_i) \| \geqslant \| \sum_{i \in \sigma_n} x_i \| > \varepsilon \quad (6.1.13)$$

故$\{\mathrm{cl}(\sum_{i=q_1}^{k} \mathrm{cl}A_i), k \in \sigma\}$不是$(\mathbf{P}_{bf}(X), \delta)$中Cauchy列，这与(3)矛盾.

推论 6.1.1 设$\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_0(X)$，$A_n (n \geqslant 1)$为有界集，若$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$无条件收敛，则$\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}A_n)$，且

$$(\delta)\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{k}\mathrm{cl}A_n) \to \mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)(k \to \infty) \quad (6.1.14)$$

证明 $\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}A_n) = \mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{cl}A_n)$ 是显然的. 下证后一结论成立. 由定理 6.1.3 及$(\mathbf{P}_{bf}(X),\delta)$ 的完备性可知存在 $A \in \mathbf{P}_{bf}(X)$,使得

$$(\delta)\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{k}\mathrm{cl}A_n) \to A \ (k \to \infty) \quad (6.1.15)$$

由于任给 $x \in \sum_{n=1}^{\infty}A_n$,存在 $x_n \in A_n$,使得$\lim_{k\to\infty}\| x - \sum_{n=1}^{k}x_n \| = 0$,而$\sum_{n=1}^{k}x_n \in \mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{k}\mathrm{cl}A_n)(k \geqslant 1)$,故知 $x \in A$,因此有

$$\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}A_n) \subset A \quad (6.1.16)$$

假设存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及子列$\{k_i, i \geqslant 1\}$,使得任给 $i \geqslant 1$,有

$$\delta(\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{k_i}\mathrm{cl}A_n),\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)) > \varepsilon_0 \quad (6.1.17)$$

由(5.1.15)、(5.1.16) 知存在 $K_1 > 0$,使 $k > K_1$ 时,有

$$\delta_u(\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{k}\mathrm{cl}A_n),\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)) < \varepsilon_0 \quad (6.1.18)$$

取 $a_n \in A_n(n \geqslant 1)$,由于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 无条件收敛,故存在 $K_2 > 0$,使得 $k > K_2$ 时,$\| \sum_{n=k}^{\infty}a_n \| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. 取

$$K = \max(K_1, K_2)$$

由(6.1.17)、(6.1.18) 知存在 i_0,使 $k_{i_0} > K$,且

$$\delta_l(\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{k_{i_0}}\mathrm{cl}A_n),\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)) > \varepsilon_0 \tag{6.1.19}$$

因此存在 $x_n \in A_n(1 \leqslant n \leqslant k_{i_0})$，使得 $d(\sum_{n=1}^{k_{i_0}}x_n,\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)) > \varepsilon_0$. 令

$$y_n = \begin{cases} x_n, 1 \leqslant n \leqslant k_{i_0} \\ a_n, n > k_{i_0} \end{cases} \tag{6.1.20}$$

则 $y_n \in A_n(n \geqslant 1)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 无条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)$. 但由 y_n 的定义知：

$$\begin{aligned} & d(\sum_{n=1}^{\infty}y_n,\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)) \\ = & d(\sum_{n=1}^{k_{i_0}}x_n + \sum_{n=k_{i_0}+1}^{\infty}a_n,\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)) \\ \geqslant & d(\sum_{n=1}^{k_{i_0}}x_n, A) - \| \sum_{n=k_{i_0}+1}^{\infty}a_n \| \\ > & \frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \notin \sum_{n=1}^{\infty} A_n$，矛盾. 因此(5.1.14)成立.

定理 6.1.4 设 $\{A_1,\cdots,A_p\} \subset \mathbf{P}_0(X)$，则

$$\overline{\mathrm{co}}(\sum_{n=1}^{p}A_n) = \mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{p}\overline{\mathrm{co}}A_n)$$

$$= \mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{p} \overline{\mathrm{co}} A_n) \quad (6.1.21)$$

证明 仅需证明 $p=2$ 情形，即对于 $A_1, A_2 \in \mathbf{P}_0(X)$ 有

$$\overline{\mathrm{co}}(A_1 + A_2) = \mathrm{cl}(\mathrm{co}A_1 + \mathrm{co}A_2)$$
$$= \mathrm{cl}(\overline{\mathrm{co}}A_1 + \overline{\mathrm{co}}A_2) \quad (6.1.22)$$

显然$\overline{\mathrm{co}}(A_1 + A_2) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{co}A_1 + \mathrm{co}A_2)$. 任给 $x \in \mathrm{co}A_1 + \mathrm{co}A_2$，存在 $x_1 \in \mathrm{co}A_1$，$x_2 \in \mathrm{co}A_2$，使得 $x = x_1 + x_2$，取 $\{x_{1i}, 1 \leqslant i \leqslant k_1\} \subset A_1$，$\{x_{2i}, 1 \leqslant i \leqslant k_2\} \subset A_2$，及 $\{\lambda_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant k_1\}$，$\{\mu_j > 0, 1 \leqslant j \leqslant k_2\}$，$\sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i = 1$，$\sum_{j=1}^{k_2} \mu_j = 1$，使得

$$x_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i x_{1i}, \quad x_2 = \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j x_{2j}$$

于是有

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \lambda_i \mu_j (x_{1i} + x_{2j}) \in \overline{\mathrm{co}}(A_1 + A_2) \end{aligned}$$

因此知

$$\mathrm{cl}(\mathrm{co}A_1 + \mathrm{co}A_2) \subset \overline{\mathrm{co}}(A_1 + A_2)$$

即证(6.1.22)式第一个等式成立，而第二个等式是显然的.

定理6.1.5 设$\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_0(X)$，$A_n$ 有界($n \geqslant 1$). 如果$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 无条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} A_n$ 也无条件收敛，且

$$\overline{\mathrm{co}}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} A_n) \quad (6.1.23)$$

证明 首先证明$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n$无条件收敛. 任给自然数增子列$\{n_i\}$, 考虑序列$\{\text{cl}(\sum_{i=1}^{k} \overline{\text{co}}A_{n_i}), k \geqslant 1\}$. 由于$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$无条件收敛, 故$\{\text{cl}(\sum_{i=1}^{k} \text{cl}A_{n_i}), k \geqslant 1\}$为$(\mathbf{P}_{bf}(X), \delta)$中Cauchy列. 任给$k \geqslant 1$, 由定理6.1.4知

$$\text{cl}(\sum_{i=k}^{k+p} \overline{\text{co}}A_{n_i}) = \overline{\text{co}}(\sum_{i=k}^{k+p} \text{cl}A_{n_i})$$

因此

$$\begin{aligned}\| \text{cl}(\sum_{i=k}^{k+p} \overline{\text{co}}A_{n_i}) \| &= \| \overline{\text{co}}(\sum_{i=k}^{k+p} \text{cl}A_{n_i}) \| \\ &= \| \text{cl}(\sum_{i=k}^{k+p} \text{cl}(A_{n_i})) \| \end{aligned} \tag{6.1.24}$$

故知$\{\text{cl}\sum_{i=1}^{k} \overline{\text{co}}A_{n_i}, k \geqslant 1\}$也为Cauchy列, 从而按照定理6.1.3可知$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n$无条件收敛.

下面证明(6.1.23)成立. 由于$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n$, 而$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n$为凸集, 故有

$$\overline{\text{co}}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) \subset \text{cl}(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n) \tag{6.1.25}$$

任给$x \in \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}}A_n$, 存在$x_n \in \overline{\text{co}}A_n (n \geqslant 1)$, 使得$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$无条件收敛. 取固定的$a_n \in A_n (n \geqslant 1)$, 使$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$无条件收

敛.令

$$y_k = \sum_{n=1}^{k} x_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n (k \geqslant 1)$$

则 $\| y_k - x \| \leqslant \| \sum_{n=k+1}^{\infty} x_n \| + \| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \| \to 0 (k \to \infty)$. 但依定理 6.1.4,任给 $k \geqslant 1$

$$y_k \in \sum_{n=1}^{k} \overline{\text{co}} A_n + \overline{\text{co}}(\sum_{n=k+1}^{\infty} A_n)$$

$$\subset \overline{\text{co}}(\sum_{n=k+1}^{\infty} A_n) + \overline{\text{co}}(\sum_{n=1}^{k} A_n) \subset \overline{\text{co}}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)$$

故知 $x \in \overline{\text{co}}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)$,从而知

$$\text{cl}(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} A_n) \subset \overline{\text{co}}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) \tag{6.1.26}$$

由(6.1.25),(6.1.26)知(6.1.23)成立.

[注] 事实上(6.1.23)对任意给定满足 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$ 的 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_0(X)$ 均成立.

引理 6.1.4 设 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{wkc}(X), A \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$,若对于任给 $x^* \in X^*, \lim_{n \to \infty} \sigma(x^*, A_n) = \sigma(x^*, A)$,则 $(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n) \cup A$ 是弱紧的.

证明 设 $T = N \cup \{\infty\}$ 为 N 的加一点紧化拓扑(N 为正整数全体),则 T 为紧的. 考虑一个集值映射 $F(t): T \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$,则由定理 1.6.12、定理 1.6.13 可证 $\bigcup_{t \in T} F(t)$ 是弱紧的,从而引理得证.

定理 6.1.6 设$\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{P}_{wkc}(X)$，则下列命题等价：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 无条件收敛；

(2) 任给自然数增子列$\{n_i\}$，$\sum_{i=1}^{\infty} A_{n_i} \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$；

(3) 任给自然数增子列$\{n_i\}$，存在$A \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$. 使得任给$x^* \in X^*$，有$\sigma(x^*, A) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(x^*, A_{n_i})$.

证明 "(1)⇒(2)" 仅需证明$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$. 显然$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$是凸的，由定理 6.1.3 知$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$有界，下面证明$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$是闭的. 设$\{x_k, k \geqslant 1\} \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$，$(s)x_k \to x(k \to \infty)$. 取$x_{kn} \in A_n(n \geqslant 1)$，使得$\sum_{n=1}^{\infty} x_{kn} = x_k(k \geqslant 1)$. 令$T = N \cup \{\infty\}$为正整数全体$N$的加一点紧化，记$\prod_{t \in T} A_t$为乘积拓扑空间，其中$A_t(t \in T)$取其弱拓扑，$A_\infty = \{x_k, k \geqslant 1\}$取范数拓扑，则$\prod_{t \in T} A_t$为紧拓扑空间. 记

$$a_k = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kn}, \cdots, x_k), k \geqslant 1$$

则$\{a_k, k \geqslant 1\} \subset \prod_{t \in T} A_t$. 设

$$a = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots, y)$$

为$\{a_k, k \geqslant 1\}$的一个聚点，则$y = x$且任给$n \geqslant 1$，y_n为$\{x_{kn},$

$k \geqslant 1\} \subset A_n$ 的弱聚点. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 无条件收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是无条件收敛的，所以可得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \in \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是闭的. 最后证明 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，任给 $x^* \in X^*$，取 $x_n \in A_n$，使

$$< x^*, x_n > = \sigma(x^*, A_n) \ (n \geqslant 1)$$

令 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$（无条件收敛），则 $x \in \sum_{n=1}^{\infty} A_n$，且由定理 6.1.1 知

$$\begin{aligned}\sigma(x^*, \sum_{n=1}^{\infty} A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x^*, A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} < x^*, x_n > \\ &= < x^*, x >\end{aligned}$$

因此知 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是弱紧的.

"(2)⇒(3)" 任给自然数增子列 $\{n_i\}$，令 $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_{n_i} \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，由定理 6.1.1 即得

$$\sigma(x^*, A) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(x^*, A_{n_i})(x^* \in X^*)$$

"(3)⇒(1)" 由引理 6.1.3 知，仅需证明任给 $x_n \in A_n (n \geqslant 1)$，对于任意的自然数增子列 $\{n_i\}$，$\{\sum_{i=1}^{k} x_{n_i}, k \geqslant 1\}$ 是弱收敛的. 任给 $x^* \in X^*$，由于

$$-\sigma(-x^*, A_n) \leqslant < x^*, x_n > \leqslant \sigma(x^*, A_n)$$

故

$$
\begin{aligned}
&|<x^*,x_n>|\\
&\leqslant \max(|\sigma(-x^*,A_n)|,|\sigma(x^*,A_n)|)\\
&\leqslant |\sigma(-x^*,A_n)|+|\sigma(x^*,A_n)| \qquad (6.1.27)
\end{aligned}
$$

由已知条件可得$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(x^*,A_n)$是绝对收敛的，因此

$$
\sum_{i=1}^{\infty}|<x^*,x_{ni}>|<+\infty\ (\forall\, x^*\in X^*) \tag{6.1.28}
$$

依引理6.1.4有

$$
(\bigcup_{k\geqslant 1}\sum_{i=1}^{k}A_{ni})\cup(\sum_{i=1}^{\infty}A_{ni})\in \mathbf{P}_{wk}(X)
$$

故$\{\sum_{i=1}^{k}x_{ni},k\geqslant 1\}$存在弱收敛子列. 由(6.1.28)易知$\{\sum_{i=1}^{k}x_{ni},k\geqslant 1\}$是弱收敛的.

定义6.1.3 设$(\Omega,\mathbf{A})$为一可测空间，$M:A\to \mathbf{P}_0(X)$为集值集函数，$M(\varnothing)=\{0\}$.

(1) 称M为集值测度，如果对任意不交集列$\{A_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{A}$，有

$$
\sum_{n=1}^{\infty}M(A_n)=M(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)
$$

(2) 称M为(δ)集值测度，如果$M(A)\in \mathbf{P}_f(X)$，且对任意不交集列$\{A_n,n\geqslant 1\}\subset \mathbf{A}$，有

$$
(\delta)\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{k}M(A_n))\to M(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)
$$

(3) 称 M 为弱集值测度，如果对任意不交集列 $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathbf{A}$，及任意 $x^* \in X^*$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x^*, A_n) = \sigma(x^*, \sum_{n=1}^{\infty} A_n)$$

容易证明下列事实成立：

(1) 若 M 为集值测度，则 M 是有限可加的；

(2) 若 M 为 (δ) 集值测度，则 M 在下述意义下是有限可加的：$M(A \cup B) = \mathrm{cl}(M(A) + M(B)), A \cap B = \varnothing, A, B \in \mathbf{A}$；

(3) 若 M 为弱集值测度，则 M 在下述意义下是有限可加的：$\overline{\mathrm{co}} M(A \cup B) = \overline{\mathrm{co}}(M(A) + M(B)), A \cap B = \varnothing, A, B \in \mathbf{A}$.

设 M 为一集值测度，称 $(\Omega, \mathbf{A}, M)$ 为集值测度空间，当 M 在 $\mathbf{P}_{(b)f(c)}(X)$（或 $\mathbf{P}_{(w)k(c)}(X)$）上取值时，称之为（有界）闭（凸）集值测度（相应地，（弱）紧（凸）集值测度）.

定义6.1.4 设 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_0(X)$ 为集值测度，M 的全变差 $|M|: \mathbf{A} \to R^+$ 定义为：

$$|M|(A) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \| M(A_i) \|, \quad A \in \mathbf{A}$$

其中 π 表示 $A \in \mathbf{A}$ 的 $\mathbf{A}$ 可测有限划分全体. 当 $|M|(\Omega) < +\infty$ 时，称 M 为有界变差集值测度. 用 $\mathrm{BV}[\Omega, X]$ 表示有界变差集值测度全体. 显然，有界变差集值测度必为有界集值测度.

［注］ 对 (δ) 集值测度、弱集值测度的全变差也可做类似的定义.

例 6.1.1 设$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$ 为有限测度空间，则

$$M_1(A)=\{\mu(A)\},\ A\in\mathbf{A}$$

为集值测度，且 μ 是有界变差的当且仅当 M_1 是有界变差的.
若 μ 还是非负有界的，则

$$M_2(A)=[0,\mu(A)]\ A\in\mathbf{A}$$

为有界变差集值测度.

例 6.1.2 设 $\Omega=[0,1]$, $\mathrm{A}=\mathrm{B}[0,1]$，令

$$M(A)=\begin{cases}\{0\}, & A\text{ 可数}\\ X, & A\text{ 不可数}\end{cases}$$

则 M 为集值测度，但不是有界变差的.

例 6.1.3 设 $m:\mathbf{A}\to X$ 为向量测度，令

$$M(A)\{m(B),B\subset A,B\in\mathbf{A}\},A\in\mathbf{A}$$

则 M 为集值测度，且 M 是有界变差的当且仅当 m 是有界变差的.

例 6.1.4 设 $F\in L^1[\Omega,X]$，令

$$M(A)=\int_A F(\omega)d\mu\qquad A\in\mathbf{A}$$

则 M 为有界变差集值测度.

下面我们研究各种集值测度的关系.

定理 6.1.7 设 $M:A\to\mathbf{P}_0(X)$ 为集值测度，则 $|M|$ 为实值非负广义测度.

证明 类似于向量测度的证明.

定理 6.1.8 设 M 为集值测度，则 M 为弱集值测度. 特别地，任给 $x^*\in X^*$, $\sigma(x^*,M(\cdot)):\mathbf{A}\to R$ 为广义测度，且当

M 有界变差时，$\sigma(x^*, M(\cdot))$ 也是有界变差的.

证明 由定理 6.1.1 知 M 为弱集值测度，从而任给 $x^* \in X^*$，$\sigma(x^*, M(\cdot))$ 为广义测度. 如果 $|M|(\Omega) < \infty$，任给 Ω 的 A- 可测有限划分 $\{A_1, \cdots, A_n\}$，我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma(x^*, M(A_i))| \leqslant \| x^* \|_* \cdot \sum_{i=1}^{n} \| M(A_i) \|$$

$$\leqslant \| x^* \| \, |M|(\Omega)$$

所以 $\sigma(x^*, M(\cdot))$ 是有界变差的.

定理 6.1.9 若 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_f(X)$ 为 (δ) 集值测度，则 M 为弱集值测度.

证明 由支撑函数的性质易证.

定理 6.1.10 设 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{bf}(X)$，则下列命题等价：

(1) M 为 (δ) 集值测度；

(2) 任给不交集列 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathrm{A}$，$\sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)$ 无条件收敛，且

$$M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)). \qquad (6.1.29)$$

证明 "(1)⇒(2)" 由于 M 为 (δ) 集值测度，所以任给自然数增子列 $\{n_i\}$，$\{\mathrm{cl}(\sum_{i=1}^{k} M(A_{n_i})), k \geqslant 1\}$ 依 Hausdoff 距离收敛到 $M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n_i})$，因此由定理 6.1.3 知 $\sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)$ 无条件收敛. 依推论 6.1.1 即证(6.1.29) 成立.

"(2)⇒(3)" 用反证法易知 $M(\varnothing) = \{0\}$. 任给不交集

列$\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathrm{A}$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(A_n)$无条件收敛，故由推论6.1.1知

$$(\delta)\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{k} M(A_n)) \to \mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)) = M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

所以M为(δ)集值测度.

定理 6.1.11 设$M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$，则下列命题等价：

(1)M为集值测度；

(2)M为弱集值测度；

(3)M为(δ)集值测度.

证明 "(1)⇒(2)"由定理6.1.8即得.

"(2)⇒(3)"任给不交集列$\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathbf{A}$，由于$M$为弱紧凸值弱集值测度，故由定理6.1.6可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(A_n)$无条件收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(A_n) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$. 又因任给$x^* \in X^*$，$\sigma(x^*, M(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma(x^*, M(A_n))$，故由定理6.1.1可得

$$\sigma(x^*, M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = \sigma(x^*, \sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)) \ \forall x^* \in X^* \qquad (6.1.30)$$

因此有

$$M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} M(A_n) \qquad (6.1.31)$$

由定理6.1.10知M为(δ)集值测度.

“(3)⇒(1)” 由定理 6.1.10,任给不交集列$\{A_n,n\geqslant 1\}\subset$ A,有

$$M(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\mathrm{cl}(\sum_{n=1}^{\infty}M(A_n))$$

而由定理 6.1.3. 定理 6.1.6 知 $\sum_{n=1}^{\infty}M(A_n)\in\mathbf{P}_{wkc}(X)$,故

$$M(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}M(A_n)$$

即 M 为集值测度.

推论 6.1.2 设 $M:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_0(X)$ 为有界变差集值测度,则

(1)$\mathrm{cl}M(A)$、$\overline{\mathrm{co}}M(A)$ 均为(δ) 集值测度;

(2) 若 $M(\Omega)$ 是相对弱紧的,则$\overline{\mathrm{co}}M$ 为集值测度.

证明 (1) 如果M是有界变差的,则任给不交集列$\{A_n,n\geqslant 1\}\subset\mathbf{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty}M(A_n)$ 绝对收敛,从而无条件收敛. 由定理 6.1.3、推论 6.1.1、定理 6.1.5、定理 6.1.10 易证 $\mathrm{cl}M$、$\overline{\mathrm{co}}M$ 均为集值测度.

(2) 由(1) 知$\overline{\mathrm{co}}M$ 为(δ) 集值测度,由于$M(\Omega)$ 相对弱紧,故易知$\overline{\mathrm{co}}M(A)\in\mathbf{P}_{wkc}(X)(\forall A\in\mathbf{A})$. 由定理 6.1.11 即得.

推论 6.1.3 设 $M:$ A $\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为集值测度,$N:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为一集值函数. 若$N(A)\subset M(A)(A\in\mathbf{A})$,且$N$是有限可加的,则 N 为集值测度.

证明 任给不交集列$\{A_n,n\geqslant 1\}\subset$ A,由于M 为集值测度,故

$$\| M(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n) \| = \delta(\sum_{n=1}^{k} M(A_n)$$

$$+ M(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n), \sum_{n=1}^{k} M(A_n))$$

$$= \delta(M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n), \sum_{n=1}^{k} M(A_n)) \to 0, \ k \to \infty$$

由于$N(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n) \subset M(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n)$,故知

$$\| N(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n) \| \to 0, \quad k \to \infty \qquad (6.1.32)$$

因此,由于 N 有限可加,我们有

$$\delta(N(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n), \sum_{n=1}^{k} N(A_n))$$

$$= \delta(\sum_{n=1}^{k} N(A_n) + N(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n), \sum_{n=1}^{k} N(A_n))$$

$$= \| N(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n) \| \to 0, k \to \infty$$

所以 N 为(δ) 集值测度,依定理 6.1.11 知 N 为集值测度.

§6.2 集值测度的凸性定理、选择定理与表示定理

定义 6.2.1 设 $M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_0(X)$ 为集值测度,称 $A \in \mathbf{A}$ 为 M 的一个原子集,如果 $M(A) \neq \{0\}$;且任给 $B \subset A, B \in \mathbf{A}$,总有 $M(B) = \{0\}$ 或 $M(A \backslash B) = \{0\}$ 两者之一成立.如果 M 没有任何原子集,则称 M 是非原子的.

定理 6.2.1 对任意集值测度 M，$A \in \mathbf{A}$ 是 M 的原子集当且仅当 A 为 $|M|$ 的原子集.

证明 依全变差 $|M|$ 的定义知任给 $B \in \mathbf{A}$，$M(B) = \{0\}$ 当且仅当 $|M|(B) = 0$，依定义知定理成立.

定理 6.2.2 我们假设 M 为集值测度，如果对于任意给定的 $x^* \in X^*$，$\sigma(x^*, M(\cdot))$ 为非原子广义测度，则 M 是非原子的.

证明 用反证法，假设 $A \in \mathbf{A}$ 是 M 的一个原子集，则任给 $B \subset A$，有 $M(B) = \{0\}$ 或者 $M(A \backslash B) = \{0\}$. 于是对于任给 $x^* \in X^*$，有 $\sigma(x^*, M(B)) = 0$ 或者 $\sigma(x^*, M(A \backslash B)) = 0$，则 A 也是 $\sigma(x^*, M(\cdot))$ 的原子集，与 $\sigma(x^*, M(\cdot))$ 非原子矛盾. 因此 M 是非原子的.

下面的例子说明定理 6.2.2 的逆不成立.

例 6.2.1 设 $(\Omega, \mathbf{A})$ 为可测空间，μ_1, μ_2 为其上两个非负有限测度，μ_1 是非原子的，μ_2 不是非原子的. 考虑集值测度 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{kc}(R)$

$$M(A) = [-\mu_2(A), \mu_1(A)], A \in \mathbf{A}$$

则 M 是有界变差的. 用反证法易证 M 是非原子的，但显然 $\sigma(-1, M(A)) = \mu_2(A)$ 却不是非原子的.

下面研究集值测度的凸性. 称满足下述条件的可测集族 $\{A(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_k), \varepsilon_i = 0, 1, k \geqslant 1\}$ 为 $A \in \mathbf{A}$ 的一个二进制结构:

$$A(0) \cup A(1) = A$$

$$A(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k0)\bigcup A(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k1)=A(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k)$$
$$(k\geqslant 1)$$
$$A(0)\bigcap A(1)=\varnothing$$
$$A(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k0)\bigcap A(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k1)=\varnothing\ (k\geqslant 1)$$

定理 6.2.3 假设 X 有 RNP，$M:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_0(X)$ 为非原子的有界变差集值测度，则任给 $A\in\mathbf{A}$，$\mathrm{cl}M(A)$ 是凸的.

证明 仅需考虑 $A=\Omega$ 情形. 由定理 6.1.7 知 $\mu=|M|$ 为非负有限测度，由定理 6.2.1 知 μ 是原子的. 因此存在 Ω 的一个二进制结构 $\{A(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k)\}$，使得 $\mu(A(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k))=2^{-k}\mu(\Omega)$. 下面证明 $\mathrm{cl}M(\Omega)$ 是凸的. 为此任取 $x_1,x_2\in M(\Omega)$ 及 $0<\alpha<1$，对于任给 $k\geqslant 1$ 及 $\varepsilon_i=0,1\ (1\leqslant i\leqslant k)$，选取 $x_1(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k)$，$x_2(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k)$ 如下：

$$x_j(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k)\in M(A(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k))$$
$$x_j(0)+x_j(1)=x_j$$
$$x_j(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k0)-x_j(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k1)=x_j(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k)$$
$$(j=1,2)$$

设 $\mathbf{A}_0$ 为 $\{A(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k)\}$ 生成的代数，$\mathbf{A}_1=\sigma(\mathbf{A}_0)$，于是存在 $\mathbf{A}_0$ 上的有限可加向量测度 m_1,m_2，使得

$$m_j(A(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k))=x_j(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k)\ (\forall\ j=1,2,k\geqslant 1)$$

由于任给 $A\in\mathbf{A}_0$，$\|m_j(A)\|\leqslant\mu(A)$，所以 m_j 是有界变差的，且关于 μ 绝对连续. 于是 m_1,m_2 在 $\mathbf{A}_1=\sigma(\mathbf{A}_0)$ 上有唯一的扩张，仍记作 m_1,m_2. 由于 X 有 RNP，故存在 $f_1,f_2\in L^1[\Omega;X]$，使得

$$m_j(A) = \int_A f_j d\mu \qquad (\forall\ j = 1,2, A \in \mathbf{A}) \quad (6.2.1)$$

所以可知$X \times X$值向量测度(m_1, m_2)值域的闭包为$X \times X$中的凸集. 任给$\varepsilon > 0$, 由于$(m_1(\varnothing), m_2(\varnothing)) = (0,0)$, 而$(m_1(\Omega), m_2(\Omega)) = (x_1, x_2)$, 故存在$A \in \mathbf{A}_1$使得

$$\| \alpha x_j - M_j(A) \| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall\ j = 1,2) \quad (6.2.2)$$

由于$\mathrm{A}_1 = \sigma(\mathrm{A}_0)$, 故存在$\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathrm{A}_0$, $\mu(A_n \triangle A) \to 0$, 使得

$$\| m_j(A_n) - m_j(A) \| \to 0, n \to \infty, j = 1,2$$

因此不妨假定$A \in \mathbf{A}_0$, 于是可得

$$m_1(A) + m_2(\Omega \backslash A) \in M(A) + M(\Omega \backslash A) = M(\Omega)$$

且

$$\begin{aligned} & \| \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 - m_1(A) - m_2(\Omega \backslash A) \| \\ \leqslant & \| \alpha_1 x_1 - m_1(A) \| + \| \alpha_2 x_2 - m_2(A) \| \\ < & \varepsilon \end{aligned}$$

于是知$\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in \mathrm{cl} M(\Omega)$. 因此$\mathrm{cl} M(\Omega)$是凸的.

[注 1] 如果X是有限维的, 那么我们就可以证明(Arstein[1])$M(\Omega)$本身是凸的.

[注 2] 事实上可以证明, 在定理假设下, $\mathrm{cl}(\bigcup_{A \in \mathbf{A}} M(A))$是凸的.

定义6.2.2 设$M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_0(X)$为集值测度($(\delta)$集值测度, 弱集值测度). 称可数可加向量测度$m: \mathbf{A} \to X$为$M$的一个广义选择, 如果任给$A \in \mathbf{A}$, $m(A) \in \mathrm{cl} M(A)$. 若进一步有,

$m(A) \in M(A)(A \in \mathbf{A})$，则称 m 为 M 的选择. 用 S_M 表示 M 的选择全体.

首先介绍暴露点与强暴露点的概念. 设 $K \subset X$，称 $x \in K$ 为 K 的一个暴露点，如果存在 $x^* \in X^*$，使得任给 $y \in K\backslash\{x\}$，有 $< x^*, x > > < x^*, y >$. 若进一步还有当 $\{x_n, n \geqslant 1\} \subset K$，$< x^*, x_n > \to < x^*, x >$ 时，必有 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$，则称 x 为 K 的强暴露点. 称上述定义中存在的 $x^* \in X^*$ 为 x 的暴露泛函（或者强暴露泛函）.

引理 6.2.1 (1) 设 $A, B, C \in \mathbf{P}_0(X)$，$C = A + B$，$x$ 为 C 的暴露点，则任给 $u \in A$，$v \in B$，若 $x = u + v$，则 $u(v)$ 必为 $A(B)$ 的暴露点，且与 x 有相同的暴露泛函.

(2) 设 $A, B, C \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$，$C = \text{cl}(A + B)$，若 $x \in C$ 为 C 的强暴露点，则必存在唯一的 $(u, v) \in A \times B$，使得 $x = u + v$，$u(v)$ 为 $A(B)$ 的强暴露点，且与 x 有相同的强暴露泛函.

证明 (1) 设 x^* 为 x 的暴露泛函，假设 u 不是 A 的以 x^* 为暴露泛函的暴露点，则存在 $u_1 \in A\backslash\{u\}$，使得 $< x^*, u_1 > \geqslant < x^*, u >$. 令 $x_1 = u_1 + v$，则 $x_1 \in A + B = C$，$< x^*, x_1 > \geqslant < x^*, x >$，这与 x 为 C 的暴露点矛盾，故 u 为 A 暴露点. 同理可证 v 为 B 的暴露点.

(2) 设 $x^* \in X^*$ 为 x 的强暴露泛函，令 $\alpha = \sigma(x^*, A)$，$\beta = (x^*, B)$. 取 $\{u_n, n \geqslant 1\} \subset A$，使得任给 $n \geqslant 1$，有

$$< x^*, u_n > > \alpha - \frac{1}{n} \tag{6.2.3}$$

由于 x 为 C 的强暴露点，故任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得任给 $y \in C$，$<x^*, y> > <x^*, x> - \delta$ 必有 $\|x - y\| < \varepsilon$，任取 $v_0 \in B$，使得

$$<x^*, v_0> > \beta - \frac{\delta}{2} \tag{6.2.4}$$

则 $n \geqslant \frac{2}{\delta}$ 时，有

$$<x^*, u_n + v_0> > \alpha + \beta - \delta \tag{6.2.5}$$

由于 $u_n + v \in C$，而 $\alpha + \beta = <x^*, x>$，故知 $n \geqslant \frac{2}{\delta}$ 时，有

$$\|u_n + v_0 - x\| < \varepsilon \tag{6.2.6}$$

所以知 $\{u_n, n \geqslant 1\}$ 为 Cauchy 列，从而有强极限 u，则 $\alpha = <x^*, u>$. 同理可证存在 $v \in B$，使得

$$\beta = <x^*, v>$$

由 $\alpha + \beta = \sigma(x^*, C)$ 可证 $x = u + v$，且 $u(v)$ 分别是 $A(B)$ 的强暴露点. 唯一性是显然的.

定理 6.2.4 设 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_0(X)$ 为有界变差集值测度，若 x 为 $M(\Omega)$ 的暴露点，则存在 $m \in S_M$，使得 $m(\Omega) = x$.

证明 设 $x_0^* \in X^*$ 为 x 的暴露泛函，由于任给 $A \in \mathbf{A}$，有

$$M(A) + M(\Omega \backslash A) = M(\Omega)$$

依引理 6.2.1(1) 知任给 $A \in \mathbf{A}$，存在 $m(A) \in M(A)$，使得 $m(A)$ 为 $M(A)$ 的以 x_0^* 为暴露泛函的暴露点. 任给不交集列 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{A}$，由于 M 有界变差，故 $\sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)$ 无条件收

敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ 是无条件收敛的. 但由 $m(A) \in M(A)$ 的取法可知

$$< x_0^*, \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) > = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x_0^*, M(A_n))$$

$$= \sigma(x_0^*, M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n))$$

$$= < x_0^*, m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) >$$

因此知 $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$，所以 m 是可数可加的.

引理 6.2.2 设 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_0(X)$ 为有界变差集值测度，则存在 Ω 的可测可数划分 $\{A_n, A, n \geqslant 1\}$，使得 $\Omega = A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$，且 A_n 为 M 的原子集，而 A 不包含 M 的任何原子集.

证明 令 $\mu = |M|$，则 μ 是 $(\Omega, \mathbf{A})$ 上的有限测度. 若 μ 的两个原子集 A、B 满足 $\mu(A \triangle B) = 0$，则称 A 与 B 等价，记作 $A \sim B$. 易知 $\sim$ 是 $\mathbf{A}$ 上的等价关系. 由于 $\mu(\Omega) < \infty$，故使得 $\mu(A) \geqslant \frac{1}{n}$ 的原子集等价类至多为有限个，从而 $\mathbf{A}$ 上 μ 的原子集等价类至多可数. 在每一个等价类中取一个原子集，并且使它们互不相交，记为 $\{A_n, n \geqslant 1\}$. 令 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$，则可以证 $\Omega = A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. 显然 A 不可能包含任何 μ 的原子集. 由定理 6.2.1 知 $\{A_n, A, n \geqslant 1\}$ 即为所求.

定理 6.2.5 设 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_0(X)$ 为有界变差集值测度，Ω' 为 M 的非原子部分，$M(\Omega')$ 是相对弱紧的. 则任给 $A \in \mathbf{A}$

及 $x \in M(A)$，存在 M 的广义选择 m，使得 $m(A) = x$.

证明 仅需考虑 $A = \Omega$ 情形. 设 $x \in M(\Omega)$，取 $y \in M(\Omega')$，$z \in M(\Omega \backslash \Omega')$ 使得 $x = y + z$. 由引理 6.2.2，存在 M 的互不相交的原子集列 $\{B_n, n \geqslant 1\}$ 使得 $\Omega \backslash \Omega' = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. 任取 $z_n \in M(B_n)$，使得 $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. 对于任给 $A \in \mathbf{A}, A \subset B_n$，由于 B_n 为原子集，定义

$$m(A) = \begin{cases} 0, & 若\ M(A) = \{0\} \\ z_n, & 若\ M(B_n \backslash A) = \{0\} \end{cases}$$

而对于任意 $A \in \mathbf{A}, A \subset \Omega \backslash \Omega' = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$，令

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap B_n)$$

显然上述构造的 $m(\cdot)$ 在 σ 代数 $\{A \in \mathbf{A}, A \subset \Omega \backslash \Omega'\}$ 上可数可加，且 $m(\Omega \backslash \Omega') = z, m(A) \in M(A) (A \in \{B \in \mathbf{A}, B \subset \Omega \backslash \Omega'\})$. 因此，不妨假定 M 是非原子的. 令

$$M'(A) = \mathrm{cl} M(A) \ (A \in \mathbf{A}) \qquad (6.2.7)$$

则依推论 6.1.2 知 M' 为弱紧凸集测度. 下面证明任给 $\varepsilon > 0$，存在 M' 的选择 m'，使得 $\| m'(\Omega) - x \| < \varepsilon$. 由于弱紧凸集为其暴露点闭凸包，因此存在 $M'(\Omega)$ 的暴露点 $\{x_1, \cdots x_k\}$ 及 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$，$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$，使得

$$\| x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \| < \varepsilon$$

由定理 6.2.4 知任给 $1 \leqslant i \leqslant k$，存在 M' 的选择 m'_i，使得

$m'_i(\Omega) = x_i$. 令.

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m'_i(A) \ (A \in \mathbf{A}) \qquad (6.2.8)$$

则 m' 为 M' 的选择，且 $\| x - m'(\Omega) \| < \varepsilon$.

由上所述，存在 M' 的一列选择 $\{m_n, n \geqslant 1\}$，使得

$$\lim_{n \to \infty} \| m_n(\Omega) - x \| = 0 \qquad (6.2.9)$$

用 $\Pi M'(A)$ 表示 $\{M'(A), A \in \mathbf{A}\}$ 的乘积拓扑空间，其中每一个 $M'(A)$ 取其弱拓扑. 由于 $M'(A) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)(A \in \mathbf{A})$. 所以 $\Pi M'(A)$ 在上述乘积拓扑意义下为紧的拓扑空间. 将 $\{m_n, n \geqslant 1\}$ 看作 $\Pi M'(A)$ 中的点，则 $\{m_n, n \geqslant 1\}$ 存在聚点 $m \in \Pi M'(A)$. 显然 $m(\Omega) = x$，且 m 是有限可加的，则由推论 6.1.3 知 m 是可数可加的，于是 m 为 M 的广义选择.

定理6.2.6 设 $M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{bf}(X)$ 为(δ) 集值测度，若 x 为 $M(\Omega)$ 的强暴露点，则存在 $m \in S_M$，使 $m(\Omega) = x$.

证明 因为 M 为(δ) 集值测度，故任给 $A \in \mathbf{A}$，有

$$M(\Omega) = \mathrm{cl}(M(A) + m(\Omega \backslash A)) \qquad (6.2.10)$$

因此，由引理 6.2.1(2)，任给 $A \in \mathbf{A}$，存在唯一的 $m(A) \in M(A)$，使得 $m(A)$ 为 $M(A)$ 的强暴露点，且与 x 有相同的强暴露泛函，设为 x_0^*. 下面证明 m 是可数可加的，任给不交集列 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{A}$，由于 M 为(δ) 集值测度，我们可以依定理 6.1.10 知道，$\sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)$ 无条件收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ 也是无条件收敛的. 但由于

$$< x_0^*, \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) > = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x_0^*, M(A_n))$$

$$= \sigma(x_0^*, M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n))$$

$$= \langle x_0^*, m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \rangle \qquad (6.2.11)$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$，即 m 是可数可加的.

定理 6.2.7 设 $M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{bfc}(X)$ 为(δ) 集值测度，X 有 RNP，则任给 $x \in m(\Omega)$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $m \in S_M$，使得 $\| x - m(\Omega) \| < \varepsilon$.

证明 假定 X 有 RNP，那么任意有界闭凸集是其强暴露点的闭凸包. 因此，存在 $M(\Omega)$ 的强暴露点 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 及实数 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$，$\alpha_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$，使得 $\| x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \| < \varepsilon$. 由定理 5.2.6，任给 $1 \leqslant i \leqslant k$，存在 $m_i \in S_M$，使得 $m_i(\Omega) = x_i$，令

$$M(A) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_i(A) \qquad (A \in \mathbf{A})$$

则 $m \in S_M$，且 $\| x - m(\Omega) \| < \varepsilon$.

［注］ 如果 M 是有界变差的，且 $\mathbf{A}$ 关于 $|M|$ 是可数生成的，则定理 5.2.7 中"X 有 RNP"条件可去掉.

推论 6.2.1 设 $M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_0(X)$ 为有界变差集值测度，X 有 RNP，则任给 $x \in M(\Omega)$，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 M 的广义选择 m，使得

$$\| x - m(\Omega) | < \varepsilon$$

证明 类似于定理 5.2.5，不妨假定 M 是非原子，则由推论 6.1.2、定理 6.2.3 知 $\mathrm{cl}M$ 为有界闭凸(δ) 集值测度. 由于 $x \in$

$M(\Omega) \subset \mathrm{cl}M(\Omega)$，依定理 6.2.7 即证.

［注］ 当 X 是有限维时，利用对维数归纳的方法可证，任给有界变差集值测度 $M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_0(X)$，$x \in S_M$，使得 $x = m(\Omega)$. (Z. Arstein, [1]).

定理 6.2.8 设 $M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为集值测度，则任给 $x \in M(\Omega)$，存在 $m \in S_M$，使 $m(\Omega) = x$.

证明 类似于定理 6.2.5.

下面我们开始研究集值测度的向量测度表示. 首先研究集值测度与其选择的关系.

定理 6.2.9 设 $M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{bfc}(X)$ 集值测度，若下列两条件之一满足：

(1) X 有 RNP；

(2) M 是有界变差的，且 A 关于 $|M|$ 是可分的，则任给 $A \in \mathbf{A}$，有

$$M(A) = \mathrm{cl}\{m(A), m \in S_M\}.$$

证明 由定理 5.2.7 及其注即得.

定理 6.2.10 设 $M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{bfc}(X)$ 为集值测度，若下列两条件之一满足：

(1) M 是有界变差的，且 $M(\Omega)$ 相对弱紧；

(2) M 是弱紧凸集值测度，

则任给 $A \in \mathbf{A}$，有 $M(A) = \{m(A), m \in S_M\}$.

证明 由定理 5.2.5 及定理 5.2.8 即证.

引理 6.2.3 设 $A_i, B_i \in \mathrm{P}_{bfc}(X)$ $(i = 1, 2)$ $A_1 \subset A_2$，B_1

$\subset B_2$,若 $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$,则 $A_1 = A_2, B_1 = B_2$.

证明 用反证法,不妨假设 $A_1 \neq A_2$,则存在 $x_0 \in A_2$,但 $x_0 \notin A_1$,由凸集分离定理,存在 $x_0^* \in X^*$ 及 $\varepsilon_0 > 0$,使得

$$< x_0^*, x_0 > - \sigma(x_0^*, A_1) > \varepsilon_0 \qquad (6.2.12)$$

取 $y_0 \in B_2$,使得

$$< x_0^*, y_0 > - \sigma(x_0^*, B_1) > -\frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (6.2.13)$$

则有

$$< x_0^*, x_0 + y_0 > \sigma(x_0^*, A_1) + \sigma(x_0^*, B_1) + \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$> \sigma(x_0^*, A_1 + B_1) + \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (6.2.14)$$

但由于 $x_0 + y_0 \in A_2 + B_2 = A_1 + B_1$,则

$$< x_0^*, x_0 + y_0 > \leqslant \sigma(x_0^*, A_1 + B_1)$$

矛盾.

引理 6.2.4 设$\{m_i, i \geqslant 1\}$为一列取值于X的一致有界可数可加向量测度,则$\{m_i, i \geqslant 1\}$是一致可数可加的当且仅当存在实值非负的可加测度$\lambda: \mathbf{A} \to R^+$,使得$\{m_i, i \geqslant 1\}$关于$\lambda$一致绝对连续,即

$$\lim_{\lambda(E) \to 0} \sup_{i \geqslant 1} \| m_i(E) \| = 0$$

证明 见 J. Diestel and J. Uhl[29],p. 11.

定理 6.2.11 设 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为集值函数,则下列命题等价:

(1) M 是集值测度;

(2) M 是有限可加的，且存在一列一致有界一致可数可加向量测度$\{m_i, i \geqslant 1\}$，使得任给 $A \in \mathbf{A}$，有

$$M(A) = \overline{\mathrm{co}}\{m_i(A), i \geqslant 1\}; \qquad (6.2.15)$$

(3) M 是有限可加的，且存在一列一致有界一致可数可加向量测度$\{m_i, i \geqslant 1\}$，使得任给 $A \in \mathbf{A}$，有

$$M(A) = \mathrm{cl}\{m_i(A), i \geqslant 1\}. \qquad (6.2.16)$$

证明 "(1)⇒(2)" 显然M 是有限可加的，由于$M(\Omega)$ 是闭的，而 X 可分，故存在 $M(\Omega)$ 的可数点列$\{x_k, k \geqslant 1\}$ 使

$$M(\Omega) = \mathrm{cl}\{x_k, k \geqslant 1\} = \overline{\mathrm{co}}\{x_k, k \geqslant 1\} \quad (6.2.17)$$

由定理 6.2.8，任给 $k \geqslant 1$，存在 $m_k \in S_M$，使得 $x_k = m_k(\Omega)$. 令

$$M'(A) = \overline{\mathrm{co}}\{m_i, i \geqslant 1\} \quad (A \in \mathbf{A}) \qquad (6.2.18)$$

于是易知

$$M'(A) + M'(\Omega \backslash A) = M(\Omega) = M(A) + M(\Omega \backslash A)$$

故由引理 5.3.2 知 $M'(A) = M(A) \quad (A \in \mathbf{A})$，即(6.2.15)成立. 由定理 6.1.11 知 M 也是(δ) 集值测度，故易证$\{m_i, i \geqslant 1\}$ 是一致有界一致可数可加的.

"(2)⇒(1)" 由定理 6.1.11，仅需证明M 为(δ) 集值测度. 依引理 5.2.4，存在实值非负可数可加测度 λ，使得

$$\lim_{\lambda(A) \to 0} \sup_{i \geqslant 1} \| m_i(A) \| = 0 \qquad (6.2.19)$$

任给不交集列$\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{A}$，由于 M 是有限可加的，故

$$\delta\left(\sum_{n=1}^{k} M(A_n), M\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)$$

$$= \delta(\sum_{n=1}^{k} MA_n), \sum_{n=1}^{k}(M(A_n) + M(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n))$$

$$= \| M(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n) \|$$

$$= \sup_{i \geq 1} \| m_i(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n) \| \qquad (6.2.20)$$

因此，由(6.2.19)，有

$$\lim_{k \to \infty} \delta(\sum_{n=1}^{k} M(A_n), M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = 0$$

即 M 为(δ) 集值测度.

"(1)⇒(3)" 由"(1)⇒(2)" 的证明知存在向量测度列 $\{m'_i, i \geq 1\}$，使得 $M(\Omega) = \text{cl}\{m'_i(\Omega), i \geq 1\}$，令

$$U = \{m, m = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m'_j, \alpha_j \geq 0 \text{ 为有理数}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, n \geq 1\}$$

则 U 为可数集，重新排序，记之为 $U = \{m_i, i \geq 1\}$. 令

$$M'(A) = \text{cl}\{m_i(A), i \geq 1\} \quad (A \in \mathbf{A})$$

类似"(1)⇒(2)" 可证 $M'(A) = M(A)$.

"(3)⇒(1)" 类似于"(2)⇒(1)".

定理 6.2.12 设 $M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{bfc}(X)$ 为集函数，X 有 RNP，则下列命题等价：

(1) M 为(δ) 集值测度；

(2) M 是有限可加的，且存在一列一致有界一致可数可加向量测度 $\{m_i, i \geq 1\}$，使得任给 $A \in \mathbf{A}$，有

$$M(A) = \overline{\text{co}}\{m_i(A), i \geq 1\} \qquad (6.2.21)$$

(3) M 是有限可加的，且存在一列一致有界一致可数可

加向量测度$\{m_i, i \geqslant 1\}$，使得任给 $A \in \mathbf{A}$，有

$$M(A) = \mathrm{cl}\{m_i(A), i \geqslant 1\} \qquad (6.2.22)$$

证明 利用定理6.2.7，用类似于定理6.2.11的证明方法即可.

［注1］ 本定理中 M 的有限可加性取下述意义：

$$\mathrm{cl}(M(A) + M(B)) = M(A \cup B)$$

$$A \cap B \neq \varnothing \quad A, B \in \mathbf{A} \qquad (6.2.23)$$

［注2］ 本定理中"(2)⇒(1)"，"(3)⇒(1)"不必假设 X 有 RNP.

推论5.2.2 设 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_0(X)$ 为非原子的有界变差集值测度，X 有 RNP，则存在 M 的一列广义选择$\{m_i, i \geqslant 1\}$，使得

$$\mathrm{cl}M(A) = \mathrm{cl}\{m_i(A), i \geqslant 1\} \qquad (A \in \mathbf{A})$$

证明 由推论6.1.2，定理6.2.3知cl$M$ 为有界闭凸(δ)集值测度，故由定理6.2.12即得

［注］ 类似于定理6.2.5，推论6.2.1，可以证明该推论中"M 是非原子的"这一条件可去掉.

在本节的最后，我们讨论如何用向量测度族生成集值测度的问题.

定义6.2.3 设m_1, m_2为取值于X的向量测度，称m_1, m_2是等比的，如果对于任意的$A, B \in \mathbf{A}$，$A \cap B = \varnothing$，下面三个条件之一成立.

(1) $m_1(A) = m_2(A)$；

(2) $m_1(B) = m_2(B)$;

(3) 存在与 A,B 有关的正数 $c(A,B)$，使得

$$m_1(A) - m_2(A) = c(A,B)(m_1(B) - m_2(B)).$$

定理 6.2.13 设 $\{m_i, i \geqslant 1\}$ 为一列一致有界一致可数可加向量测度，且两两等比，则

$$M(A) = \overline{\text{co}}\{m_i(A), i \geqslant 1\} \quad (A \in \mathbf{A}) \quad (6.2.24)$$

为有界闭凸(δ) 集值测度. 若进一步，任给 $A \in \mathbf{A}$，有

$$\overline{\text{co}}\{m_i(A), i \geqslant 1\} \in \mathbf{P}_{wkc}(X) \quad (6.2.25)$$

则 M 为集值测度.

证明 $M(A) \in \mathbf{P}_{bfc}(X)$ 是显然的，依定理 6.2.12 及其注，仅需证明对于任给 $A,B \in \mathbf{A}, A \cap B = \varnothing$，有

$$M(A \cup B) = \text{cl}(M(A) + M(B)) \quad (6.2.26)$$

显然 $M(A \cup B) \subset \text{cl}(M(A) + M(B))$，下面证明相反包含关系.

令

$$M'(A) = \{m_i(A), i \geqslant 1\} \quad (A \in \mathbf{A})$$

由定理 6.1.4 知

$$\text{cl}(M(A) + M(B)) = \overline{\text{co}}(M'(A) + M'(B)) \quad (6.2.27)$$

任给 $x \in M'(A) + M'(B)$，存在 $i,j \geqslant 1$，使得 $x = m_i(A) + m_j(B)$. 由于 m_i, m_j 是等比的，考虑下面三种情况：

a) 若 $m_i(A) = m_j(A)$，则

$$x = m_i(A) + m_j(B) = m_j(A \cup B) \in M(A \cup B)$$

b) 若 $m_i(B)=m_j(B)$，则

$$x=m_i(A)+m_j(B)=m_i(A\cup B)\in M(A\cup B)$$

c) 若存在 $c(A,B)$，使得

$$m_i(A)-m_j(A)=c(A,B)\cdot(m_i(B)-m_j(B))$$

不妨取 $c(A,B)=\dfrac{1-\delta}{\delta}$，$\delta>0$，则有

$$x=m_i(A)+m_j(B)=(1-\delta)m_i(A\cup B)$$
$$+\delta m_j(A\cup B)\in M(A\cup B)$$

因此 $x\in M(A\cup B)$，则知 $M'(A)+M'(B)\subset(A\cup B)$，从而由(6.2.27)，有

$$\mathrm{cl}(M(A)+M(B))\subset M(A\cup B) \qquad (6.2.28)$$

(6.2.26) 得证. 即 M 为(δ) 集值测度. 若进一步(6.2.25) 成立，则知 $M(A)\in\mathbf{P}_{wkc}(X)$，从而由定理6.1.11 知 M 为集值测度.

§6.3 集值测度的 Lebesgue 分解与扩张

经典的广义测度的 Lebesgue 定理是指，任给测度空间 $(\Omega,\mathbf{A})$ 上的广义测度 λ,μ，且 $\lambda\ll\mu$. 存在唯一的一对广义测度 λ_c,λ_s，使得

$$\lambda=\lambda_c+\lambda_s,\quad \lambda_c\ll\mu,\quad \lambda_s\perp\mu$$

关于取值于 Banach 空间上的向量测度，也有类似的 Lebesgue 分解(见 Diestel and Uhl[29]) 下面我们就研究集值测度的 Lebesgue 分解. 为了叙述简便，以下恒设 $(\Omega,\mathbf{A},\mu)$ 为非负有限

测度空间，考虑取值于 X 上的弱紧凸集值测度. 由 §6.1 的知识可知当集值函数取弱紧凸值时，集值测度、(δ) 集值测度与弱集值测度三者是等价的. 值得指出的是，下面的大部分结果均可推广到有界闭凸 (δ) 集值测度和 $\mathbf{P}_0(X)$ 上有界变差集值测度.

定义 6.3.1 设 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为集值测度. 若对于任意的 $A \in \mathbf{A}$，$\mu(A) = 0$ 时，必有 $M(A) = \{0\}$，则称 M 关于 μ 绝对连续，记作 $M \ll \mu$，若存在 $N \in \mathbf{A}$，使得对任意 $A \in \mathbf{A}$，有 $M(A \cap N^c) = \{0\}$，则称 M 关于 μ 奇异，记作 $M \perp \mu$.

定理 6.3.1 设 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为集值测度. 则 $M \ll \mu$ 当且仅当 $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} M(E) = \{0\}$.

证明 类似于可数可加向量测度.

引理 6.3.1 设 T 为任意非空集合，$\{m_\tau, \tau \in T\}$ 为一族定义在 $\mathbf{A}$ 上的一致有界一致可数可加向量测度，若任给 $\tau \in T$，$m_\tau \ll \mu$，则有

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \sup_{\tau \in T} \| m_\tau(E) \| = 0 \qquad (6.3.1)$$

证明 见 Diestel and Uhl [29].

定理 6.3.2 设 $M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为集值测度，则下列命题等价：

(1) $M \ll \mu$；

(2) 任给 $m \in S_M$，$m \ll \mu$；

(3) 任给 $x^* \in X^*$，$\sigma(x^*, M(\cdot)) \ll \mu$.

证明 仅证明(1) 等价下(2)，类似可证(1) 与(3) 等价.

(1)⇒(2)，依定义显然.

(2)⇒(1)，由定理 6.2.11，存在一列一致有界一致可数可加向量测度$\{m_i, i \geqslant 1\} \subset S_M$，使得任给 $A \in \mathbf{A}$，有

$$M(A) = \mathrm{cl}\{m_i(A), i \geqslant 1\}$$

因为 $m_i \ll \mu(\forall\, i \geqslant 1)$，故依引理 5.3.1. 知

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \| M(E) \| = \lim_{\mu(E)\to 0} \sup_{i\geqslant 1} \| m_i(E) \| = 0 \quad (6.3.2)$$

因此 $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} M(E) = \{0\}$，即 $M \ll \mu$.

定理 6.3.3 设 $M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为集值测度，则存在一对唯一的弱紧凸集值测度 M_c, M_s，使得

(1) $M_c \ll \mu, M_s \perp \mu$;

(2) $M = M_c + M_s$;

(3) 任给 $x^* \in X^*$，则有 $\sigma(x^*, M(\cdot)) = \sigma(x^*, M_c(\cdot)) + \sigma(x^*, M_s(\cdot))$ 为 $\sigma(x^*, M(\cdot))$ 的 Lebesgue 分解.

证明 取一列一致可数可加向量测度$\{m_i, i \geqslant 1\} \subset S_M$，使得任给 $A \in \mathbf{A}, M(A) = \mathrm{cl}\{m_i(A), i \geqslant 1\}$. 由引理 6.2.1 知存在非负可数可加测度 $\lambda : \mathbf{A} \to R^+$，使得

$$\lim_{\lambda(E)\to 0} \sup_{i\geqslant 1} \| m_i(E) \| = 0 \qquad (6.3.3)$$

设 λ 关于 μ 的 Lebesgue 分解为 $\lambda = \lambda_c + \lambda_s, \lambda_c \ll \mu, \lambda_s \perp \mu$，则存在 $A_1, A_2 \in \mathbf{A}, A_1 \cup A_2 = \Omega, A_1 \cap A_2 = \varnothing$，使得任给 $A \in \mathbf{A}$，有

$$\lambda_c(A) = \lambda(A \cap A_1), \lambda_s = \lambda(A \cap A_2) \qquad (6.3.4)$$

对于任意 $i \geqslant 1$，定义

$$m_{ic}(A) = m_i(A \cap A_1), m_{is}(A) = m_i(A \cap A_2)$$

则$\{m_{ic},i\geqslant 1\}$、$\{m_{is},i\geqslant 1\}$均是一致有界一致可数可加的，且

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\sup_{i\geqslant 1}\|m_{ic}(E)\| = 0 \tag{6.3.5}$$

$$m_{is}(A\cap A_1) = 0 \quad (i\geqslant 1) \tag{6.3.6}$$

令

$$M_c(A) = \mathrm{cl}\{m_{ic}(A),i\geqslant 1\}$$
$$= \mathrm{cl}\{m_i(A\cap A_1),i\geqslant 1\} \tag{6.3.7}$$

$$M_s(A) \doteq \mathrm{cl}\{m_{is}(A),i\geqslant 1\}$$
$$= \mathrm{cl}\{m_i(A\cap A_2),i\geqslant 1\} \tag{6.3.8}$$

则易知M_c、M_s为弱紧凸集值测度，且

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\|M_c(E)\| = \lim_{\mu(E)\to 0}\sup_{i\geqslant 1}\|m_{ic}\| = 0$$

$$M_s(A\cap A_1) = \{0\}$$

即$M_c\ll\mu$,$M_s\perp\mu$. 由(6.3.7)、(6.3.8)可知

$$M_c(A)+M_s(A) = M(A\cap A_1)$$
$$+ M(A\cap A_2) = M(A)$$

故$M = M_c + M_s$. 由定理6.3.2即得任给$x^*\in X^*$

$$\sigma(x^*,M(\cdot)) = \sigma(x^*,M_c(\cdot)) + \sigma(x^*,M_s(\cdot))$$

为广义测度$\sigma(x^*,M(\cdot))$关于μ的Lebesgue分解.

下面我们研究集值测度的扩张. 设$\mathbf{F}$是$\mathbf{\Omega}$上的代数，$\sigma(\mathbf{F}) = \mathbf{A}$称$M:\mathbf{F}\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$为$\mathbf{F}$上的集值测度，若对于任意$\{A_n,n\geqslant 1\}\subset\mathbf{F}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathbf{F}$，有$M(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}M(A_n)$. 如果存在集值测度$\overline{M}:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$，使得对于任意的$A\in\mathbf{F}$，有

$$\overline{M}(A) = M(A)$$

则称 $\overline{M}$ 为 M 的扩张.

引理 6.3.2 设$\{m_\tau,\tau\in T\}$为$\mathbf{A}$上的一族可数可加向量测度,$\mathbf{F}$为代数,$\sigma(\mathbf{F})=\mathbf{A}$,则$\{m_\tau,\tau\in T\}$是一致强可加的当且仅当$\{m_\tau|_{\mathbf{F}},\tau\in T\}$是一致强可加的(其中$m_\tau|_{\mathbf{F}}$表示$m_\tau$在$\mathbf{F}$上的限制).

定义 6.3.2 设$M:\mathbf{F}\to\mathbf{P}_{wk}(X)$为集值测度,$M$的半变差$\|M\|:\mathbf{F}\to[0,\infty]$定义作

$$\|M\|(A)=\sup\{|\sigma(x^*,M(\cdot))|,x^*\in X^*,\|x^*\|\leqslant 1\}$$

其中$|\sigma(x^*,M(\cdot))|$表示广义测度$\sigma(x^*,M(\cdot))$的全变差.若$\|M\|(\Omega)<\infty$,则称M是半有界变差的.

类似于向量测度可证集值测度M是半有界变差的当且仅当M的值域是有界集,即$\|\bigcup_{A\in\mathbf{F}}M(A)\|<\infty$.

定理 6.3.4 设 X 是自反的 Banach 空间,$M:\mathbf{F}\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$为半有界变差集值测度,则下列命题等价:

(1) 存在M在$\mathbf{A}$上唯一的扩张$\overline{M}:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$;

(2) 任给不交集列$\{A_n,n\geqslant 1\}\subset\mathbf{F}$,$\{\sum_{n=1}^{k}M(A_n),k\geqslant 1\}$依 Hausdorff 距离收敛.

证明 (1)⇒(2) 依扩张的定义及定理 6.1.11 易证.

(2)⇒(1) 用定理 6.2.11 中同样的方法,在(2)的假设下,可以证明存在一列一致有界一致强可加向量测度$\{m_i,i\geqslant 1\}$,使得

$$M(A)=\overline{\mathrm{co}}\{m_i(A),i\geqslant 1\}\quad(\forall A\in\mathbf{A})\quad(6.3.9)$$

设$\overline{m_i}$为m_i在$\mathbf{A}$上的扩张，则依引理6.3.2知$\{\overline{m_i},i\geqslant 1\}$是一致有界一致可数可加的. 令

$$\overline{M}(A)=\overline{\mathrm{co}}\{\overline{m_i}(A),i\geqslant 1\}\quad(\forall\ A\in\mathbf{A})\tag{6.3.10}$$

由于X是自反的，故$\overline{M}(A)\in\mathbf{P}_{wkc}(X)(\forall\ A\in\mathbf{A})$. 依定理6.2.11要证$\overline{M}$为集值测度，仅需证明任给$A,B\in\mathbf{A},A\cap B=\varnothing$，有

$$\overline{M}(A)+\overline{M}(B)=\overline{M}(A\cup B)\tag{6.3.11}$$

亦即任给$x^*\in X^*$，有

$$\sigma(x^*,\overline{M}(A))+\sigma(x^*,\overline{M}(B))=\sigma(x^*,\overline{M}(A\cup B))\tag{6.3.12}$$

分两步进行证明：

(i) 首先假设$A\in\mathbf{F}$，记

$$\mathbf{L}_1=\{C\in\mathbf{A},\sigma(x^*,\overline{M}(A))+\sigma(x^*,\overline{M}(C))=\sigma(x^*,\overline{M}(A\cup C)),A\cap C=\varnothing\}$$

则显然$\mathbf{F}\cap A^c\subset\mathbf{L}_1$，任给$\{C_k,k\geqslant 1\}\subset\mathbf{L}_1,C_k\uparrow C$，则$A\cap C=\varnothing$. 由于$\{\overline{m_i},i\geqslant 1\}$是一致可数可加的，故有

$$\begin{aligned}\sigma(x^*,\overline{M}(A\cup C))&=\sup\{<x^*,\overline{m}(A\cup C)>,i\geqslant 1\}\\&=\lim_{k\to\infty}\sup\{<x^*,\overline{m_i}(A\cup C_k)>,i\geqslant 1\}\\&=\lim_{k\to\infty}\sigma(x^*,\overline{M}(C_k))+\sigma(x^*,\overline{M}(A))\\&=\sigma(x^*,\overline{M}(C))+\sigma(x^*,\overline{M}(A))\end{aligned}\tag{6.3.13}$$

则$C\in\mathbf{L}_1$. 类似可证当$\{C_k,k\geqslant 1\},\subset\mathbf{L}_1,C_k\downarrow C$时，也有$C\in\mathbf{L}_1$，故知$\mathbf{L}_1$是单调类. 由于$\mathbf{F}\cap A^c\subset\mathbf{L}_1$，所以$B\in\sigma(\mathbf{F}\cap A^c)$

$\subset \mathbf{L}_1$.

(ii) 如果 $A \in \mathbf{A} = \sigma(\mathbf{F})$,记

$$\mathbf{L}_2 = \{C \in \mathbf{A}, \sigma(x^*, \overline{M}(C)) + \sigma(x^*, \overline{M}(B)) = \sigma(x^*, \overline{M}(B \cup C)), B \cap C = \varnothing\}.$$

则由(i) 结论知 $\mathbf{F} \cap B^c \subset \mathbf{L}_2$,类似可证 $\mathbf{L}_2$ 是单调类. 因此,有 $A \in \sigma(\mathbf{F} \cap B^c) \subset \mathbf{L}_2$,从而(6.3.12) 得证.

由上所述 $\overline{M}: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为集值测度,且我们任意给定 $A \in \mathbf{F}$,依 $\overline{M}$ 的定义即得 $\overline{M}(A) = M(A)$,所以 $\overline{M}$ 是 M 在 $\mathbf{A}$ 上的扩张. 由上述证明过程可知 $\sigma(x^*, \overline{M}(\cdot))$ 是 $\sigma(x^*, M(\cdot))$ 在 $\mathbf{A}$ 上的扩张,故由实值测度扩张的唯一性及支撑函数的性质即可以证 $\overline{M}$ 的唯一性.

[注 1] 如果仅仅要求 $\overline{M}$ 为有界闭凸(δ) 集值测度,则定理 6.3.4 中 X 自反的条件可去掉.

[注 2] 定理 6.3.4 中两个等价命题中的(2) 实际上意味着集值测度在某种意义下的强可加性.

§ 6.4 集值测度的 Radon-Nikodym 导数

设$(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$ 为测度空间,$F \in \mu[\Omega; X]$,$S_F^1 \neq \varnothing$,由集值随机变量积分的性质可知:

$$M(A) = \int_A F d\mu \quad (\forall\ A \in \mathbf{A})$$

是$(\Omega, \mathbf{A})$ 上的集值测度. 本节研究其反问题 —— 集值测度的

R-N 导数. 以下恒设$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$为σ-有限测度空间.

定义6.4.1 设$M:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_0(X)$为集值测度($(\delta)$集值测度,弱集值测度). 若存在$F\in\mu[\Omega;X]$,使得

$$\mathrm{cl}M(A)=\mathrm{cl}\int_A Fd\mu \quad (\forall\ A\in\mathbf{A}) \qquad (6.4.1)$$

则称F为M关于μ的广义 R-N 导数. 若进一步有

$$M(A)=\int_A Fd\mu \quad (\forall\ A\in\mathbf{A}) \qquad (6.4.2)$$

则称F为M的 R-N 导数. 记作$F=\dfrac{dM}{d\mu}$.

定理6.4.1 设$F\in\mu[\Omega;X]$为集值测度M的广义 R-N 导数,则

(1) $|M|(A)=\int_A \|F(\omega)\|d\mu$;$(\forall\ A\in\mathbf{A})$

(2) M是有界变差的当且仅当F可积有界.

证明 (1) 仅需证明$A=\Omega$情形. 设$\{A_1,\cdots,A_n\}$为Ω的任意可测有限划分. 任给$x_i\in M(A_i)(1\leqslant i\leqslant n)$及$\varepsilon>0$,那么存在$f_i\in S_F^1$,使得

$$\left\| x_i-\int_{A_i} f_i d\mu\right\| <\frac{\varepsilon}{n} \quad (\forall\ 1\leqslant i\leqslant n) \quad (6.4.3)$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \|x_i\| \leqslant \sum_{i=1}^n\int_{A_i}\|f_i\|d\mu+\varepsilon\leqslant\int_\Omega\|F(\omega)\|d\mu+\varepsilon \qquad (6.4.4)$$

因此可知$\sum\limits_{i=1}^n \|M(A_i)\|\leqslant\int_\Omega\|F\|d\mu$,所以

$$|M|(\Omega) \leqslant \int_{\Omega} \| F \| d\mu \tag{6.4.5}$$

反之任给 $f \in S_F^1$，有

$$\int_{\Omega} \| f \| d\mu = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \| \int_{A_i} f d\mu \| \leqslant \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \| M(A_i) \|$$

$$= |M|(\Omega)$$

其中 π 表示 Ω 的可测有限划分全体，于是由第二章知识有

$$\int_{\Omega} \| F \| d\mu \leqslant |M|(\Omega) \tag{6.4.6}$$

由(6.4.5)、(6.4.6)即得.

(2) 显然.

下面给出几个有关集值测度导数的例子.

例 6.4.1 设$\{m_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$是一列向量测度，定义

$$M(A) = \{ \sum_{i=1}^{n} m_i(A_i), \{A_1, \cdots, A_n\} \text{ 为 } A \text{ 的可测划分} \}$$

则 M 为集值测度. 若任给 $1 \leqslant i \leqslant n$，存在 $f_i \in L^1[\Omega; X]$，使

$$m_i(A) = \int_A f_i d\mu \quad (\forall\ A \in \mathbf{A})$$

则 $F(\omega) = \{f_i(\omega), i \geqslant 1\}$ 为 M 关于 μ 的 R-N 导数.

例 6.4.2 设$(\Omega, \mathbf{A}, \mu)$为非原子的有限测度空间，令

$$F_1(\omega) = \{0, 1\},\ F_2(\omega) = [0, 1] \quad (\forall\ \omega \in \Omega)$$

则 $F_1, F_2 \in \mu[\Omega, X]$，且任给 $A \in \mathbf{A}$ 有

$$\int_A F_1 d\mu = \int_A F_2 d\mu = [0, \mu(A)] \tag{6.4.7}$$

从而知F_1, F_2均为$M = [0, \mu(\cdot)]$的R-N导数. 这个例子说明

集值测度的 R-N 导数不必是唯一的.

例 6.4.3 设$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$为有限测度空间,$F\in\mathbf{L}^1_f[\Omega,X]$,$\mathbf{F}$ 为 $\mathbf{A}$ 的子 σ- 代数. 由定理 2.4.12 可知

$$\mathrm{cl}\int_A^{(F)} E[F/\mathbf{F}]d\mu=\mathrm{cl}\int_A Fd\mu \quad (\forall\ A\in\mathbf{F}) \tag{6.4.8}$$

因此可以看出 $E[F/\mathbf{F}]$ 是集值测度

$$M(A)=\int_A Fd\mu \quad (A\in\mathbf{A}) \tag{6.4.9}$$

在 $\mathbf{F}$ 上限制的广义 R-N 导数.

关于集值测度 R-N 导数存在的构造性证明,有以下几种方法:

(1) 利用集值测度的表示定理,向量测度的 R-N 导数及集值随机变量的 Castaing 表示进行构造.

(2) 利用集值测度与其选择的关系,向量测度的 R-N 导数及集值随机变量与其可积选择空间的关系进行构造.

(3) 利用支撑函数的性质.

它们各有利弊.

定理 6.4.2 设 X 有 RNP,$M:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_{bfc}(X)$ 为有界变差的(δ)集值测度,且 $M\ll\mu$,则存在 M 关于 μ 的广义 R-N 导数 $F\in\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$.

证明 由定理 6.2.12,存在一列向量测度$\{m_i,i\geqslant 1\}$,使得

$$M(A)=\mathrm{cl}\{m_i(A),i\geqslant 1\} \quad (\forall\ A\in\mathbf{A}) \tag{6.4.10}$$

显然,m_i 是有界变差的且 $m_i\ll\mu$. 设 $f_i\in L^1[\Omega;X]$ 为 m_i 关于

μ 的 R-N 导数，令

$$G(\omega) = \text{cl}\{f_i(\omega), i \geqslant 1\} \quad (\forall\ \omega \in \Omega) \quad (6.4.11)$$

由定理 2.2.3 易知 $G \in \mathbf{L}_f^1[\Omega, X]$，由(6.4.10)可得

$$M(A) \subset \text{cl}\int_A G d\mu \quad (\forall\ A \in \mathbf{A}) \qquad (6.4.12)$$

下面证明相反的包含关系. 取定 $A \in \mathbf{A}$，设 $f \in S_G^1$. 对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 Ω 的有限可测划分 $\{A_1, \cdots, A_k\}$，$k \geqslant 1$，使得

$$\| f - \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_j} f_j \|_1 < \varepsilon$$

从而更有

$$\| \int_A f d\mu - \sum_{j=1}^{k} \int_A \chi_{A_j} f_j d\mu \| < \varepsilon \qquad (6.4.13)$$

但由于

$$\sum_{j=1}^{k} \int_A \chi_{A_j} f_j d\mu = \sum_{j=1}^{k} m_j(A \cap A_j)$$

$$\in \sum_{j=1}^{k} M(A \cap A_j) = M(A)$$

因此由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知

$$\int_A f d\mu \in M(A) \qquad (6.4.14)$$

故知 $M(A) = \text{cl}\int_A G d\mu \quad (\forall\ A \in \mathbf{A})$. 令 $F(\omega) = \overline{\text{co}} G(\omega) \quad (\forall\ \omega \in \Omega)$，则 $F \in \mathbf{L}_{fc}^1[\Omega; X]$，且对于任意的 $A \in \mathbf{A}$，有

$$\text{cl}\int_A F d\mu = \text{cl}\int_A \overline{\text{co}} G d\mu$$

$$=\overline{\text{co}}\int_A G d\mu$$

$$=\overline{\text{co}} M(A)$$

$$=M(A)$$

即 F 为 M 关于 μ 的广义 R-N 导数.

定理 6.4.3 设 X 有 RNP, $M:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_0(X)$ 为有界变差的集值测度, $M\ll\mu$, 则存在 M 关于 μ 的广义 R-N 导数 $F\in\mathbf{L}_f^1[\Omega;X]$.

证明 根据引理 6.2.2, 存在至多可数不交集列 $\{A_i, i\geqslant 1\}\subset\mathbf{A}$, 使得 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 包含了 μ 的所有原子集, 且 $A_i(i\geqslant 1)$ 均为 μ 的原子集. 定义 $F:\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\to\mathbf{P}_0(X)$ 为 $F(\omega)=\dfrac{1}{\mu(A_i)}\cdot \text{cl}M(A_i)$, 若 $\omega\in A_i$. 由于 A_i 也是 M 的原子集, 故易知

$$\text{cl}M(A)=\text{cl}\int_A F d\mu\quad(\forall A\in\mathbf{A}, A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\tag{6.4.15}$$

由上所述, 不妨假定 μ 是非原子的, 由于 $M\ll\mu$, 不难验证 M 也是非原子的. 因此依定理 6.2.3, 推论 6.1.2(1) 知

$$\text{cl}M(A):\mathbf{A}\to\mathbf{P}_{bfc}(X)$$

为(δ)集值测度. 依定理 6.4.2 可证.

定理 6.4.4 设 X 有 RNP, X^* 是可分的, $M:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为有界变差的集值测度, $M\ll\mu$, 则存在 M 关于 μ 的 R-N 导数 $F\in\mathbf{L}_{wkc}^1[\Omega;X]$.

证明 用 $\text{cabv}[\mathbf{A},X]$ 表示取值于 X 的有界变差可数可

加向量测度全体在全变差范数下的Banach空间. 由于M是有界变差的，故$S_M \subset \mathrm{cabv}[\mathbf{A},X]$. 下面证明$S_M$为弱紧集.

因为任给$m \in S_M$, $|m|(A) \leqslant |M|(A) \quad (\forall A \in \mathbf{A})$. 又因$M$是有界变差的. 故$|M|$为可数可加实值有限测度，故有

(i) S_M为$\mathrm{cabv}[\mathbf{A},X]$中有界集；

(ii) 任给$m \in S_M, m \ll |M|$；

由定理6.2.10可知

(iii) 任给$A \in \mathbf{A}$, $\{m(A), m \in S_M\} = M(A) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$.

因此知S_M为$\mathrm{cabv}[\mathbf{A},X]$中相对弱紧集(Diestel and Uhl[29]). 显然S_M是凸的、强闭的、故知S_M为$\mathrm{cabv}[\mathbf{A},X]$中弱紧凸集. 考虑$L^1[\Omega,X]$子集

$$K = \{f \in L^1[\Omega,X], \frac{dm}{d\mu} = f, m \in S_M\} \quad (6.4.16)$$

其中$\frac{dm}{d\mu}$表示m关于μ的R-N导数. 由R-N导数算子$T: \mathrm{cabv}[\mathbf{A},X] \to L^1[\Omega,X]$的强连续性易知$K$为$L^1[\Omega,X]$中弱紧凸集. 下面证明$K$是可分解的，任给$f_1, f_2 \in K, A \in \mathbf{A}$，设$m_1, m_2 \in S_M, \frac{dm_1}{d\mu} = f_1, \frac{dm_2}{d\mu} = f_2$，令

$$\begin{aligned} m(B) &= \int_B (\chi_A f_1 + \chi_{A^c} f_2) d\mu \\ &= m_1(A \cap B) + m_2(A^c \cap B) \quad (6.4.17) \end{aligned}$$

则m为可数可加向量测度，且$m \in S_M, m \ll \mu$，显然我们有$\frac{dm}{d\mu} = \chi_A f_1 + \chi_{A^c} f_2$，从而知$\chi_A f_1 + \chi_{A^c} f_2 \in K$，即证$K$是可分解的. 于是存在集值随机变量$F \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega,X]$，使得$S^1_F = K$ 由F

的构造显然$\frac{dM}{d\mu}=F$.

［注］ Papageorgiou［86］证明了如果 X 还是弱序列完备的，且不含与 l^1 同构的子空间，则本定理中"X^* 可分"这一条件可去掉.

定理 6.4.5 设 X 有 RNP，X^* 可分，$M:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_0(X)$ 为有界变差的集值测度，$M\ll\mu$. 若$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$是非原子的，则存在唯一的 $F\in\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$ 为 M 关于 μ 的广义 R-N 导数. 若 $\{x_n^*,n\geqslant 1\}$ 为 X^* 的可数稠密子集，则

$$F(\omega)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X,<x_n^*,x>$$

$$\leqslant\frac{d\sigma(x_n^*,M(\cdot))}{d\mu}(\omega)\}\text{a.e.} \tag{6.4.18}$$

其中$\frac{d\sigma(x_n^*,M(\cdot))}{d\mu}$表示广义测度 $\sigma(x_n^*,M(\cdot))$ 关于 μ 的 R-N 导数.

证明 由定理 6.4.3 知存在 M 关于 μ 的广义 R-N 导数 $F\in\mathbf{L}^1_{fc}[\Omega;X]$，令

$$G(\omega)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X,<x_n^*,x>\leqslant\frac{d\sigma(x_n^*,M(\cdot))}{d\mu}\}$$

$$(\omega\in\Omega)$$

不妨假设 $G(\omega)\neq\varnothing(\forall\ \omega\in\Omega)$，由于 $\mathrm{Gr}G\in\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}(X)$，因此 $G\in\mu[\Omega;X]$. 为证 $F(\omega)=G(\omega)\text{a.e.}$，仅需证明 $S_F^1=S_G^1$. 显然有 $S_F^1\subset S_G^1$，下证相反包含关系. 设 $f\in S_G^1$，则任给 $n\geqslant 1$，有

$$< x_n^*, f(\omega) > \leqslant \frac{d\sigma(x_n^*, M(\cdot))}{d\mu}(\omega) \text{a.e.} \quad (6.4.19)$$

于是

$$\begin{aligned} < x_n^*, \int_A f d\mu > &= \int_A < x_n^*, f > d\mu \\ &\leqslant \sigma(x_n^*, M(A)) \\ &\qquad (A \in \mathbf{A}, n \geqslant 1) \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{cl}M(A)$ 是凸的，故

$$\int_A f d\mu \in \mathrm{cl}M(A) = \mathrm{cl} \int_A F d\mu \qquad (6.4.20)$$

所以有 $f \in S_F^1$，从而 $S_G^1 \subset S_F^1$. 因此(6.4.18)成立. 根据广义测度 R-N 导数的唯一性及(6.4.18)即知 F 的唯一性.

用集值随机变量的性质不难证明下列三个关于集值测度 R-N 导数性质的定理.

定理 6.4.6 设 X 有 RNP，X^* 可分，$M_i : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$，$i = 1,2$ 为有界变差的集值测度，而且 $M_i \ll \mu (i = 1,2)$，$M_1(A) \subset M_2(A) (\forall A \in \mathbf{A})$，则

$$\frac{dM_1}{d\mu} \subset \frac{dM_2}{d\mu} \text{ a.e.} \qquad (6.4.21)$$

定理 6.4.7 设 X 有 RNP，X^* 可分，$M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wk}(X)$ 为有界变差的集值测度，$M \ll \mu$，则 $\overline{\mathrm{co}}(\frac{dM}{d\mu})$ 是 $\overline{\mathrm{co}}M$ 关于 μ 的 R-N 导数.

定理 6.4.8 设 X 有 RNP，X^* 可分，$M : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为有界变差的集值测度，$M \ll \mu$，则

$$S_M = \left\{ \int_{(\cdot)} f d\mu, f \in S_F^1, F = \frac{dM}{d\mu} \right\} \quad (6.4.22)$$

最后我们讨论紧凸集值测度的R-N导数.由定理1.2.14知，对于$\mathbf{P}_{kc}(X)$，存在Banach空间$\hat{X}$及等距同构的映射$j: \mathbf{P}_{kc}(X) \to \hat{X}$,使得$j:(\mathbf{P}_{kc}(X))$为$\hat{X}$中的闭凸锥.因此,可以直接运用向量测度的某些结果研究紧凸集值测度.

引理6.4.1 设$\mathbf{B} \subset \mathbf{P}_{kc}(X)$,则$\mathbf{B}$是$(\mathbf{P}_{kc}(X),\delta)$中的相对紧集当且仅当存在$X$的紧子集$C$,使得$\bigcup\{A, A \in \mathbf{B}\} \subset C$.

证明 由定理1.3.9易证.

定理6.4.9 设$M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{kc}(X)$为集值测度.则存在$M$关于$\mu$的R-N导数$F \in \mathbf{L}_{kc}^1[\Omega;X]$当且仅当下列三个条件成立:

(i) $M \ll \mu$;

(ii) M是有界变差的;

(iii) 对于任给$A \in \mathbf{A}, 0 < \mu(A) < \infty$,存在$B \subset A$及$X$的紧子集$C$,使得$\mu(B) > 0$,且$\bigcup\{\frac{M(B')}{\mu(B')}, B' \in \mathbf{A}, B' \subset B$,且$\mu(B') > 0\} \subset C$.

证明 设$\hat{X}$为Banach空间,$j: \mathbf{P}_{kc}(X) \to \hat{X}$为等距同构映射,使得$j(\mathbf{P}_{kc}(X))$为$\hat{X}$的闭凸锥.考虑$\hat{X}$-值集函数$j(M): \mathbf{A} \to \hat{X}$

$$j(M)(A) = j(M(A)) \quad (\forall A \in \mathbf{A})$$

则由引理6.4.1容易验证(i)(ii)(iii)分别等价于:

(i)′ $j(M) \ll \mu$;

(ii)′ $j(M)$ 为 $\hat{X}$- 值可数可加的有界变差向量测度；

(iii)′ 对于任给 $A\in\mathbf{A}, 0<\mu(A)<\infty$，存在 $B\subset A, \mu(B)>0$，使得

$$\left\{\frac{j(M)(B')}{\mu(B')}, B'\in\mathbf{A}, B'\subset B, \text{且 } \mu(B')>0\right\}$$
$$\subset j(\mathbf{P}_{kc}(X))$$

为 $\hat{X}$ 中相对紧子集.

由向量测度的R-N导数定理知 $j(M)$ 关于 μ 的R-N导数存在等价于(i)′，(ii)′，(iii)′ 三个条件成立(Diestel and Uhl[29]). 但由于任给 $F\in\mathbf{L}^1_{kc}[\Omega;X]$，有

$$j(\int_A F d\mu)=\int_A j(F)d\mu \qquad (6.4.23)$$

因此可知 F 为 M 关于 μ 的R-N导数当且仅当 $j(F)$ 为 $j(M)$ 关于 μ 的R-N导数，定理得证.

推论 6.4.1 设 $M:\mathbf{A}\to\mathbf{P}_{kc}(X)$ 为有界变差集值测度，$M\ll\mu$. 若存在 X 的紧子集 C，使得任给 $A\in\mathbf{A}$，有

$$M(A)\subset|M|(A)C \qquad (6.4.24)$$

则存在 M 关于 μ 的R-N导数 $F\in\mathbf{L}^1_{kc}[\Omega;X]$.

证明 由于 $|M|\ll\mu$，且任给 $A\in\mathbf{A}$，有

$$\frac{M(A)}{\mu(A)}\subset\frac{|M|(A)}{\mu(A)}\cdot C \qquad (6.4.25)$$

故容易验证定理 6.4.9 中条件(iii)成立.

§6.5 关于集值测度的积分

设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间. $m:\mathbf{A}\to X$为有界变差向量测度，$f\in L^1[\Omega,R]$为实值可积函数. 用通常定义积分的方法(由简单函数过渡到任意可积函数)，可以定义$f(\omega)$关于m的积分.

$$\int_\Omega f dm \in X \tag{6.5.1}$$

可以证明，上述定义的积分满足通常积分的性质，特别地我们有

$$\left\| \int_\Omega f\, dm \right\| \leqslant \int_\Omega |f| d|m| \tag{6.5.2}$$

$$< x^*, \int_\Omega f\, dm > = \int_\Omega f\, d(x^* o m) (\forall\, x^* \in X^*) \tag{6.5.3}$$

其中$|m|$表示m的全变差. $x^* om$表示由$x^* om(\cdot) = < x^*, m(\cdot) >$定义的广义测度.

本节讨论实值可积函数关于集值测度的积分. 以下恒设$(\Omega,\mathbf{A},M)$为有界变差的集值测度空间，$\mu = |M|$为M的全变差，且$(\Omega,\mathbf{A},\mu)$是完备的.

定义6.5.1 设$f\in L^1[\Omega,R]$为实值可积函数，f关于M的积分定义作

$$\int_\Omega f\, dM = \{\int_\Omega f\, dm, m \in S_M\} \tag{6.5.4}$$

定理6.5.1 设M_1,M_2为两个有界变差的集值测度，f

$\in L^1[\Omega,R]$，如果 $M_1(A) \subset M_2(A) \quad (\forall A \in \mathbf{A})$，则

$$\int_\Omega f\, dM_1 \subset \int_\Omega f\, dM_2 \tag{6.5.5}$$

证明 由假设知 $S_{M1} \subset S_{M2}$，依定义即得.

定理 6.5.2 任给 $f \in L^1[\Omega,R]$，有

$$\left\| \int_\Omega f\, dM \right\| \leqslant \int_\Omega |f|\, d\mu \tag{6.5.6}$$

证明 任给 $x \in \int_\Omega f\, dM$，存在 $m \in S_M$，使得 $x = \int_\Omega f\, dm$，

则

$$\|x\| \leqslant \int_\Omega |f| d|m|$$

但显然 $|m|(A) \leqslant |M|(A) = \mu(A) \quad (\forall A \in \mathbf{A})$，因此 $\|x\| \leqslant \int_\Omega |f| d\mu$，即证.

定理 6.5.3 设 $f \in L^1[\Omega,R]$，则

$$M_f(A) = \int_A f dM \quad (\forall A \in \mathbf{A}) \tag{6.5.7}$$

为有界变差集值测度.

证明 显然 $M_f(\varnothing) = \{0\}$. 设 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{A}$ 为任意不交集列，$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$，下面证明

$$M_f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} M_f(A_n) \tag{6.5.8}$$

$M_f(A) \subset \sum_{n=1}^{\infty} M_f(A_n)$ 是显然的，为证相反包含关系，任取 x_n

$\in M_f(A_n)$ $(n \geqslant 1)$，则存在 $m_n \in S_M$，使得

$$x_n = \int_{A_n} f\, dm_n \quad (\forall\, n \geqslant 1) \tag{6.5.9}$$

任选 $m_0 \in S_M$，定义 $m: \mathbf{A} \to X$ 如下：

$$m(C) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(A_n \cap C) + m_0(A^c \cap C) \quad (\forall\, C \in \mathbf{A}) \tag{6.5.10}$$

由于 $|m_0| \leqslant |M|$，$|m_n| \leqslant |M|$ $(\forall\, n \geqslant 1)$，因此$\{m_0, m_n, n \geqslant 1\}$为一致可数可加的，故知 m 是可数可加的，且 $m \in S_M$.

$$\int_{A_n} f\, dm = \int_{A_n} f\, dm_n \quad (\forall\, n \geqslant 1)$$

于是有

$$\int_A f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, dm_n \in M_f(A) \tag{6.5.11}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in M_f(A_n)$，即证 $\sum_{n=1}^{\infty} M_f(A_n) \subset M(A)$. 因此(6.5.8)成立，即 $M_f(A)$ 是集值测度. 由定理 6.5.2 及全变差的定义易知 M_f 是有界变差的.

定理 6.5.4 设 X 有 RNP，X^* 是可分的，$M: \mathbf{A} \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为有界变差的集值测度，$f \in L^1[\Omega, R]$，那么存在 $G \in \mathbf{L}^1_{wkc}[\Omega, X]$，使得：

$$\int_\Omega f\, dM = \int_\Omega f\, G d\mu \tag{6.5.12}$$

证明 由定理 6.4.4 知，一定存在 M 关于 μ 的 R-N 导

数 $G \in L^1_{uwkc}[\Omega;X]$. 下面证明(6.5.12)成立. 设 $x \in \int_\Omega f\,dM$,则存在 $m \in S_M$,使得 $x = \int_\Omega f\,dm$. 由定理 6.4.8,存在 $g \in S^1_G$,使得

$$m(A) = \int_A g d\mu \quad (\forall\ A \in \mathbf{A})$$

即 $g(\omega)$ 为 m 关于 μ 的 R-N 导数,于是有

$$x = \int_\Omega f\,dm = \int_\Omega f \cdot g d\mu \in g\int_\Omega fG d\mu$$

即证 $\int_\Omega f\,dM \subset \int_\Omega f\,G d\mu$,类似可证相反的包含关系.

推论 6.5.1 在定理 6.5.4 条件下,任给 $f \in L^1[\Omega,R]$,则

$$M_f(A) = \int_A f\,dM \quad (\forall\ A \in \mathbf{A})$$

为弱紧凸有界变差集值测度.

推论 6.5.2 在定理 6.5.4 条件下,任给 $x^* \in x^*$,有

$$\sigma(x^*, \int_\Omega f dM) = \int_\Omega f d\sigma(x^*, M(\cdot))$$

§6.6 关于集值转移测度

首先给出本节特殊的记号与必需的知识. 设$(\Omega,\mathbf{A})$为可测空间,X为Banach空间. 用ca(Ω,X)表示$(\Omega,\mathbf{A})$上取值于X的可数可加向量测度空间,cabv(Ω,X)表示其上有界变差向量测度全体形成的子空间. 用S表示$(\Omega,\mathbf{A})$上实值简单可测

函数全体，令

$$S\otimes X^*=\{\sum_{k=1}^{n}\chi_{A_k}x_k^*,\{A_k,k\geqslant 1\}\text{ 为 }\Omega\text{ 的有限可测划分，}$$

$$\chi_k^*\in X^*,1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant 1\}\qquad(6.6.1)$$

考虑$\mathrm{ca}(\Omega,X)$上由下面定义的弱拓扑$w(\mathrm{ca}(\Omega,X),S\otimes X^*)$：

$$<m,\mu>=<m,\sum_{k=1}^{n}\chi_{A_k}x_k^*>$$

$$=\sum_{k=1}^{n}<x_k^*,m(A_k)>\qquad(6.6.2)$$

设$\{m_\alpha,\alpha\in D\}$为$\mathrm{ca}(\Omega,X)$中的定向列，称$\{m_\alpha,\alpha\in D\}$简单弱收敛到m（记作$(\tau)m_\alpha\to m$），如果任给$A\in\mathbf{A}$，有$(w)m_\alpha(A)\to m(A)$. 依定义易证：

引理 6.6.1 $(\tau)m_\alpha\to m$ 当且仅当

$$m_\alpha\to m(w(\mathrm{ca}(\Omega,X),S\otimes X^*))$$

设T为Polish空间，$\mathbf{B}(T)$为其Borel σ代数. 用$C_b(T)$表示T上实值有界连续函数空间，$C_b(T)\otimes X$表示T上取值于X的有限维子空间的有界连续函数空间. 分别用$\mathrm{cabv}(T)$和$\mathrm{cabv}(T,X)$表示$(T,\mathbf{B}(T))$上实值有界变差测度空间与X-值有界变差向量测度空间. 考虑$\mathrm{cabv}(T,X)$上的弱拓扑$w(\mathrm{cabv}(\mathbf{T},X),C_b(T)\otimes X^*)$. 任给$x^*\in X^*$，定义映射$x^*om:\mathrm{cabv}(T,X)\to\mathrm{cabv}(T)$如下：

$$x^*om(A)=<x^*,m(A)>\quad(\forall A\in\mathbf{B}(T))\qquad(6.6.3)$$

我们有

引理 6.6.2 $x^* om$ 是

$$(\mathrm{cabv}(T,X),w(\mathrm{cabv}(T,X),C_b(T)\otimes X^*))$$

到 $\mathrm{cabv}(T)$ 上连续映射，因而可测. 其中 $\mathrm{cabv}(T)$ 取通常意义下的弱收敛拓扑.

称 Hausdorff 拓扑空间 Y 为 Suslin 空间，如果存在一个 Polish 空间 Z 及连续满射 $\varphi: Z \to Y$.

引理 6.6.3 设 X 为可分的自反 Banach 空间，T 为 Polish 空间，则 $(\mathrm{cabv}(T,X),w(\mathrm{cabv}(T,X),C_b(T)\otimes X^*))$ 为 Suslin 空间.

证明 见 Saint-Beuve[94].

引理 6.6.4 设 $(\Omega,\mathbf{A},\mu)$ 为完备的测度空间，Y 为 Suslin 空间，$F:\Omega\to \mathbf{P}_f(X)$ 为集值映射. 若 $\mathrm{Gr}F\in \mathbf{A}\otimes\mathbf{B}(Y)$，则 F 有可测选择.

证明 见 Wagner[107].

定义 6.6.1 设 $(\Omega,\mathbf{A})$、$(T,\mathbf{B})$ 为可测空间，X 为 Banach 空间，称 $M:\Omega\times\mathbf{B}\to\mathbf{P}_f(X)$ 为集值转移测度，如果它满足：

(1) 任给 $A\in\mathbf{B}$，$M(\cdot,A)$ 关于 $\omega\in\Omega$ 可测；

(2) 任给 $\omega\in\Omega$，$M(\omega,\cdot)$ 为 $(T,\mathbf{B})$ 上的集值测度，称 $m:\Omega\times\mathbf{B}\to X$ 为 $M(\cdot,\cdot)$ 的选择转移测度，如果它满足：

(1) 任给 $A\in\mathbf{B}$，$m(\cdot,A)$ 关于 $\omega\in\Omega$ 可测；

(2) 任给 $\omega\in\Omega$，$m(\omega,\cdot)$ 为 $(T,\mathbf{B})$ 上的可数可加向量测度；

(3) 任给 $\omega\in\Omega$，$A\in\mathbf{B}$，$m(\omega,A)\in M(\omega,A)$.

集值转移测度 $M(\cdot,\cdot)$ 的选择转移测度全体记作 TS_M.

以下恒设 $(\Omega,\mathbf{A},\mu)$ 为完备的有限测度空间，X 为可分的自反 Banach 空间，T 为 Polish 空间，$\mathbf{B}(T)$ 为其 Borelσ- 代数，λ 为 $(T,\mathbf{B}(T))$ 上的有限测度.

定理 6.6.1 设 $M:\Omega\times\mathbf{B}(T)\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为有界变差的集值转移测度，对于任给 $A\in\mathbf{B}(T)$ 及可测函数 $h:\Omega\to X$，满足 $h(w)\in M(\omega,A)(\forall\ \omega\in\Omega)$，存在 $m\in TS_M$，使得

$$m(\omega,A)=h(\omega)\quad(\forall\ \omega\in\Omega)\qquad(6.6.4)$$

证明 定义 $R_A(\omega):\Omega\to 2^{\mathrm{cabv}(T,X)}$ 如下：

$$R_A(\omega)=\{m\in\mathrm{cabv}(T,X),m\in S_{M(\omega,\cdot)},m(A)=h(\omega)\}$$

由定理 6.2.8，$R_A(\omega)\neq\varnothing$，且显然 $R_A(\omega)\in\mathbf{P}_f(\mathrm{cabv}(T,X))$. 任给 $C\in\mathbf{B}(T)$，$x^*\in X^*$，考虑 $\Omega\times\mathrm{cabv}(T,X)$ 上定义的实值函数：

$$\Phi_{C,x^*}(\omega,m)=\langle x^*,m(C)-h(\omega)\rangle$$

$$\varphi_{C,x^*}(\omega,m)=\sigma(x^*,M(\omega),C))-\langle x^*,m(C)\rangle$$

由引理 6.6.2 及定义 6.6.1 易知 Φ_{C,x^*}，φ_{C,x^*} 均是 $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}(\mathrm{cabv}(T,X))$ 可测的.

设 $\{x_n^*,n\geqslant 1\}$ 为 X^* 的稠密子列，由于 T 为 Polish 空间，则 $\mathbf{B}(T)$ 是可数生成的，即存在代数 $\{C_k,k\geqslant 1\}\subset\mathbf{B}(T)$，使得 $\sigma(\{C_n,n\geqslant 1\})=\mathbf{B}(T)$. 记

$$\Phi_n(\omega,m)=\langle x_n^*,m(A)-h(\omega)\rangle$$

$$\varphi_{n,k}(\omega,m)=\sigma(x_n^*,M(C_k))-\langle x_n^*,m(C_k)\rangle$$

则有

$$\mathrm{Gr}(R_A(\omega)) = \bigcap_{n\geq 1,k\geq 1}\{(\omega,m) \in \Omega \times \mathrm{cabv}(T,X),$$
$$\Phi_n(\omega,m) = 0, \varphi_{n,k}(\omega,m) \geq 0\}$$
$$\in \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}(\mathrm{cabv}(T,X))$$

于是依引理 6.6.3、引理 6.6.4，存在 $R_A(\omega)$ 的可测选择 $r(\omega): \Omega \to \mathrm{cabv}(T,X)$. 令 $m(\omega,C) = r(\omega)(C)(\omega \in \Omega, C \in \mathbf{B}(T))$，则 $m(\cdot,\cdot) \in TS_M$，且 $m(\omega,A) = h(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$.

引理 6.6.5 设 $m: \Omega \times \mathbf{B}(T) \to X$ 为有界变差的向量转移测度，$m(\omega,\cdot) \ll \lambda(\mu - \text{a.e.})$，则存在可测函数 $f(\omega, t): \Omega \times T \to X$ 及 $N \in \mathbf{A}, \mu(N) = 0$，使得 $f(\omega,\cdot) \in L^1(T, \lambda, X)(\forall\ \omega \in \Omega)$，且有

$$m(\omega,C) = \int_C f(\omega,t)\lambda(dt) \quad (\forall\ C \in \mathbf{B}(T)) \tag{6.6.5}$$

证明 取 $N \in \mathbf{A}, \mu(A) = 0$，使得 $m(\omega,\cdot) \ll \lambda(\omega \in \Omega \backslash N)$. 由于 X 自反，自然有RNP，故任给 $\omega \in \Omega \backslash N$，存在 $f(\omega, \cdot) \in L^1(T,\lambda,X)$，使得

$$m(\omega,C) = \int_C f(w,t)\lambda(dt) \quad (C \in \mathbf{B}(T))$$

令 $f(\omega,\cdot) \equiv 0 \quad (\forall\ \omega \in \Omega \backslash N)$，则有 $f(\omega,\cdot) \in L^1(T,\lambda, X)(\omega \in \Omega)$. 下面证明 $f(\cdot,\cdot): \Omega \times T \to X$ 是可测的. 任给 $x^* \in X^*, C \in \mathbf{B}(T)$，由于

$$< f(\omega,\cdot), \chi_c x^* >_L = < x^*, m(\omega,C) >$$

(其中 $<\cdot,\cdot>_L$ 所表示的就是 $(L^1(T,\lambda,X^*), L^\infty(T,\lambda,x^*) = L^1(T,\lambda,X^*)$ 之间的对偶.) 因此 $\omega \to < f(\omega,\cdot), \chi_c x^* >_L$ 是可测的. 由于可数值函数在 $L^\infty(T,\lambda,X^*)$ 中稠密，因此知

$f(\omega,\cdot):\Omega\to L^1(T,\lambda,X)$ 是弱可测的. 但由于 $\mathbf{L}^1(T,\lambda,X)$ 是可分的,故依 Pettis 可测性定理知 $f(\omega,\cdot):\Omega\to L^1(T,\lambda,X)$ 是可测的,从而更有 $f(\omega,t):\Omega\times T\to X$ 是可测的.

定理 6.6.2 设 $M:\Omega\times\mathbf{B}(T)\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为有界变差集测度, $|M(\omega,\cdot)|\ll\lambda(\mu\text{-a.e.})$,则存在可测集值函数 $F:\Omega\times T\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 及 $N\in\mathbf{A}$, $\mu(N)=0$,使得任给 $F(\omega,\cdot)$ 可积有界($\forall\ \omega\in\Omega$),且

$$M(\omega,C)=\int_C F(\omega,t)\lambda(dt)\quad(\forall\ \omega\in\Omega\backslash N.\ C\in\mathbf{B}(T))\tag{6.6.6}$$

证明 取可测函数 $h_n:\Omega\to\mathbf{X}$, $n\geqslant 1$,使得

$$M(\omega,T)=\mathrm{cl}\{h_n(\omega),n\geqslant 1\}\quad(\forall\ \omega\in\Omega)\tag{6.6.7}$$

由定理 6.6.1 知,任给 $n\geqslant 1$,存在 $m_n\in TS_M$,使得

$$h_n(\omega)=m_n(\omega,T)\quad(\forall\ \omega\in\Omega)\tag{6.6.8}$$

任给 $C\in\mathbf{B}(T)$,由于

$$\begin{aligned}&\mathrm{cl}\{m_n(\omega,C)+m_n(\omega,C^c),n\geqslant 1\}\\&=\mathrm{cl}\{h_n(\omega),n\geqslant 1\}\\&=M(\omega,C)+M(\omega,C^c)\\&\mathrm{cl}\{m_n(\omega,C)+M_n(\omega,C^c),n\geqslant 1\}\\&\subset\overline{\mathrm{co}}\{m_n(\omega,C),n\geqslant 1\}+\overline{\mathrm{co}}\{m_n(C^c),n\geqslant 1\}\end{aligned}$$

故依引理 6.2.3 可知

$$\overline{\mathrm{co}}\{m_n(\omega,C),n\geqslant 1\}=M(\omega,C)\tag{6.6.9}$$

依引理 6.6.5,存在可测函数列 $f_n:\Omega\times T\to X$ 及 $N\in$

$\mathbf{A}, \mu(N)=0$，使得 $f_n(\omega,\cdot)\in L^1(T,\lambda,X),(n\geqslant 1,\omega\in\Omega\backslash n)$，且

$$m_n(\omega,C)=\int_C f_n(\omega,t)\lambda(dt)$$

$$(n\geqslant 1,\omega\in\Omega\backslash N,C\in\mathbf{B}(T)).$$

令 $F(\omega,t)=\overline{\mathrm{co}}\{f_n(\omega,t),n\geqslant 1\}$，则 $F:\Omega\times T\to\mathbf{P}_{wkc}(X)$ 是可测的，且

$$|F(\omega,t)|\leqslant\frac{d|M|(\omega,t)}{d\lambda}(\mu\times\lambda-\text{a.e.})$$

由于 $\frac{d|M|(\omega,\cdot)}{d\lambda}\in L^1(T,\lambda,R)$，故知 $F(\omega,\cdot)$ 是可积有界的.

由定理 2.3.3 易证：

$$\begin{aligned}M(\omega,C)&=\overline{\mathrm{co}}\{m_n(\omega,C),n\geqslant 1\}\\&=\overline{\mathrm{co}}\{\int_C f_n(\omega,t)\lambda(dt),n\geqslant 1\}\\&=\int_C\overline{\mathrm{co}}\{f_n(\omega,t),n\geqslant 1\}\lambda(dt)\\&=\int_C F(\omega,t)\lambda(dt)\end{aligned}$$

即(6.6.6)成立.

下面，我们讨论实值可测函数 $f:\Omega\times T\to R$ 关于集值转移测度的积分.

定义6.6.2 我们假设 $f:\Omega\times T\to R$ 是可测的，且 $f(\omega,\cdot)\in L^1(T,\lambda,R)(\omega\in\Omega)$. $M:\Omega\times\mathbf{B}(T)\to\mathbf{P}_f(X)$ 为集值转移测度，$|M(\omega,\cdot)|\ll\lambda(\mu-\text{a.e.})$，$f(\cdot,\cdot)$ 关于 $M(\cdot,\cdot)$ 的

积分定义为

$$\int_C f(\omega,t)dM(\omega,dt) = \{\int_C f(\omega,t)m(\omega,dt), m \in TS_M\}$$

$$(C \in \mathbf{B}(T)) \qquad (6.6.10)$$

引理 6.6.6 我们假设 $f: \Omega \times T \to R$ 是可测的，$f(\omega, \cdot) \in L^1(T,\lambda,R)$ $(\forall \omega \in \Omega)$. m 为向量值转移测度，则 $\omega \to \int_C f(\omega,t)m(\omega,dt)$ 可测.

证明 设 $S_n: \Omega \times T \to R$ 为简单函数，$|S_n(\omega,t)| \leqslant |f(\omega,t)|$，且

$$S_n(\omega,t) \to f(\omega,t) \ (\mu \times \lambda - \text{a.e.})$$

显然任给 $n \geqslant 1$，$\omega \to \int_C S_n(\omega,t)m(\omega,dt)$ 可测，而由控制收敛定理知 $\int_C S_n(\omega,t)m(\omega,dt) \to \int_C f(\omega,t)m(\omega,dt)$ $(\mu - \text{a.e.})$，因此 $\omega \to \int_C f(\omega,t)m(\omega,dt)$ 是可测的.

引理 6.6.7 设 $M: \mathbf{B}(T) \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$ 为集值测度，且存在 $W \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$，使得 $M(C) \subset \lambda(C) \cdot W (\forall C \in \mathbf{B}(T))$，$f \in L^1(T,\lambda,R)$，则对于任意的 $(x^* \in X^*, C \in \mathbf{B}(T))$，映射 $m \to < x^*, \int_C f(t)m(dt) >$ 在 S_M 上关于简单弱收敛拓扑连续.

证明 首先假定 $f(t)$ 为简单函数，$f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{B_k}$，则

$$\int_C f(t)m(dt) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot m(C \cap B_k)$$

因此 $m \to < x^*, \int_C f(t)m(dt) >$ 关于 $m \in S_M$ 连续. 对于任意

$f \in \mathbf{L}^1(T,\lambda,R)$，设 $S_n(t)$ 为 T 上的简单函数，$\|f-S_n\| \to 0, n\to\infty$，但由于

$|<x^*,m(C)>| \leqslant \lambda(C)\cdot\|x^*\|\cdot\|W\| (\forall x^* \in X^*)$

因此可知$\{\int_C |f(t)-S_n(t)|d|x^* om|(t), n\geqslant 1\}$关于$m \in S_M$一致地收敛于0，从而知$\{\int_C S_n(t)d(x^* om), n\geqslant 1\}$关于$m \in S_M$一致收敛于$\int_C f(t)d(x^* om)$．因为任给$n\geqslant 1$，$\int_C S_n(t)d(x^* om)$ 关于 $m \in S_M$ 连续，故知

$$m \to \int_C f(t)d(x^* om) = <x^*, \int_C f(t)m(dt)>$$

关于 $m \in S_M$ 在简单弱收敛拓扑下连续.

定理 6.6.3 设$\{\omega\} \in \mathbf{A}(\forall \omega \in \Omega)$，$M: \Omega \times \mathbf{B}(T) \to \mathbf{P}_{fc}(X)$为集值转移测度，且存在$W(\omega): \Omega \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$，使得任给$\omega \in \Omega, C \in \mathbf{B}(T)$，有 $M(\omega,C) \subset \lambda(C)W(\omega)$，则任给$f: \Omega \times T \to R$ 可测，$f(\omega,\cdot) \in \mathbf{L}^1(T,\lambda,R)$ 有，

$$N(\omega,C) = \int_C f(\omega,t)M(\omega,dt) \qquad (6.6.11)$$

为弱紧凸集值转移测度.

证明 由定理 6.6.1 知$TS_M \neq \varnothing$，故$N(\cdot,\cdot)$ 非空. 由于 $M(\cdot,\cdot)$ 是凸的，则TS_M 是凸的，从而知$N(\cdot,\cdot)$ 是凸的. 另一方面，由于$\{\omega\} \in \mathbf{A}$，所以任给 $\omega \in \Omega, C \in \mathbf{B}(T)$，有

$$\{\int_C f(\omega,t)m(\omega,dt), m \in TS_M\}$$

$$= \{\int_C f(\omega,t)\hat{m}(dt), \hat{m} \in S_{M(\omega,\cdot)}\} \qquad (6.6.12)$$

下面证明 $N(\omega,C) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$. 设 $\{x_\alpha, \alpha \in D\}$ 为 $N(\omega,C)$ 中定向列, $(w)x_\alpha \to x$, 则依定义有

$$x_\alpha = \int_C f(\omega,t)\hat{m}_\alpha(dt), \hat{m}_\alpha \in S_{M(\omega,\cdot)}\}$$

而易证 $S_{M(\omega,\cdot)}$ 是 cabv 中简单弱收敛拓扑意义下的紧子集, 因此存在子定向列 $\{\hat{m}_\beta, \beta \in D'\}$, $D' \subset D$, 使得 $(\tau)\hat{m}_\beta \to \hat{m} \in S_{M(\omega,\cdot)}$. 因此依引理 6.6.7 可得

$$(\omega)\int_C f(\omega,t)\hat{m}_\beta(dt) \to \int_C f(w,t)\hat{m}(dt)$$

则 $x = \int_C f(w,t)\hat{m}(dt) \in N(w,C)$. 于是 $N(\omega,C) \in \mathbf{P}_{fc}(X)$. 但由于

$$N(\omega,C) = \int_C f(\omega,t)M(\omega,dt) \subset [\int_C f(\omega,t)\lambda(dt)]W(\omega) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$$

因此 $N(\omega,C) \in \mathbf{P}_{wkc}(X)$ ($\forall\ \omega \in \Omega, C \in \mathbf{B}(T)$).

设 $m \in TS_M$, $x^* \in X^*$, 不妨假设 $f(\omega,t) \geqslant 0$ (否则取其正负部分别考虑). 依 $x^*\ om$ 的定义可知

$$< x^*, \int_C f(\omega,t)m(\omega,dt) >$$

$$= \int_C f(\omega,t)d(x^*\ om)(\omega,dt)$$

$$\leqslant \int_C f(\omega,t)\sigma(x^*, M(\omega,dt))$$

从而有

$$\sigma(x^*,N(\omega,C))\leqslant\int_C f(\omega,t)\sigma(x^*,M(\omega,dt))$$

固定 $x^*\in X^*$，定义

$$H_c(\omega)=\{\hat{m}\in \text{cabv}(T,X),\sigma(x^*,M(C))$$
$$=\langle x^*,\hat{m}(C)\rangle,\hat{m}\in S_{M(\omega,\cdot)}\}(\omega\in\Omega)$$

可以证明(这里用到良序原理)$H_c(\omega)\neq\varnothing\quad(\forall\ \omega\in\Omega)$，并且用定理 6.6.1 同样的方法可知存在可测映射 $r(\omega):\Omega\to \text{cabv}(T,X)$，使得 $r(\omega)\in H_c(\omega)\quad(\forall\ \omega\in\Omega)$. 令 $m(\omega,C)=r(\omega)(C)$，则 $m\in TS_M$，且

$$\sigma(x^*,M(\omega,C))=\langle x^*,m(\omega,C)\rangle$$

即知 $\sigma(x^*,N(\omega,C))=\int_C f(\omega,t)d(x^*\circ m)(\omega,dt)$，所以

$$\omega\to\sigma(x^*,N(\omega,C))$$

是可测的. 设 $\{x_k^*,k\geqslant 1\}$ 为 X^* 可数稠密子列，任给 $C\in\mathbf{B}(T)$，由于

$$\text{Gr}(N(\cdot,C))=\bigcap_{k\geqslant 1}\{(\omega,y)\in\Omega\times X,\langle x_k^*,y\rangle$$
$$\leqslant\sigma(x_k^*,N(\omega,C))\}\in\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}(X)$$

故知 $N(\cdot,C)$ 关于 $\omega\in\Omega$ 可测. 由于 $\sigma(x^*,N(\omega,C))$ 为实值广义测度，而 $N(\omega,C)\in\mathbf{P}_{wkc}(X)$，故依定理 6.1.11，$N(\omega,C)$ 为集值转移测度.

推论 6.6.1 在定理 6.6.3 条件下，对于任给 $\omega\in\Omega,C\in\mathbf{B}(T)$ 及 $x^*\in X^*$，有

$$\sigma(x^*,N(\omega,C))=\int_C f(\omega,t)\sigma(x^*,M(\omega,dt))\tag{6.6.13}$$

证明 由定理 6.6.3 的证明过程即得.

推论 6.6.2 在定理 6.6.3 条件下,任给 $\omega \in \Omega$,有

$$S_{N(\omega,\cdot)} = \{\int_{(\cdot)} f(\omega,t)m(\omega,dt), m \in TS_M\} \quad (6.6.14)$$

证明 任给 $\omega \in \Omega$,令

$$\Gamma(\omega) = \{V(\cdot) = \int_{(\cdot)} f(\omega,t)\hat{m}(dt)\hat{m} \in S_{M(\omega,\cdot)}\}$$

$$= \{V(\cdot) = \int_{(\cdot)} f(\omega,t)m(\omega,dt), m \in TS_M\}$$

由于 $S_{M(\omega,\cdot)}$ 在简单弱收敛拓扑意义下是紧的,故依引理 6.6.7 知 $\Gamma(\omega)$ 为 $\mathrm{cabv}(T,X)$ 中简单弱收敛拓扑下的闭凸集. 任给 $V_1, V_2 \in \Gamma(\omega)$,以及 T 的 $\mathbf{B}(T)$- 可测划分 $\{B_1, B_2\}$,依定义

$$V_1(B) = \int_B f(\omega,t)\hat{m}_1(dt), \hat{m}_1 \in S_{M(\omega,\cdot)}, B \in \mathbf{B}(T)$$

$$V_2(B) = \int_B f(\omega,t)\hat{m}_2(dt), \hat{m}_2 \in S_{M(\omega,\cdot)}, B \in \mathbf{B}(T)$$

定义向量测度 $\hat{m}_0$ 如下:

$$\hat{m}_0(B) = \hat{m}_1(B \cap B_1) + \hat{m}_2(B \cap B_2)$$

显然 $\hat{m}_0 \in S_{M(\omega,\cdot)}$,于是若令

$$V_0(B) = V_1(B \cap B_1) + V_2(B \cap B_2)$$

则有

$$V_0(\cdot) = \int_{(\cdot)} f(\omega,t)\hat{m}_0(dt)$$

因此 $V_0 \in \Gamma(\omega)$,即知 $\Gamma(\omega)$ 为 $\mathrm{cabv}(T,X)$ 中可分解子集,从

而存在集值测度 $N_1(\omega)(\cdot):\mathbf{B}(T)\to\mathbf{P}_{fc}(X)$，使得

$$\Gamma(\omega)=S_{N_1(\omega)(\cdot)}\quad(\forall\ \omega\in\Omega)$$

下面证明 $N_1(\omega)(C)=N(\omega,C)$ $(\forall\ \omega\in\Omega),C\in\mathbf{B}(T)$. $N_1(\omega)(C)\subset N(\omega,C)$ 是显然的，而易证

$$\{\int_c f(\omega,t)\hat{m}(dt),\hat{m}\in S_{M(\omega,\cdot)}\}$$

$$=\{\int_c f(\omega,t)m(\omega,dt),m\in TS_M\}$$

因此 $N_1(\omega)(C)=N(\omega,C)$ $(\forall\ \omega\in\Omega,C\in\mathbf{B}(T))$，则 $\Gamma(\omega)=S_{N(\omega,\cdot)}$，即证(6.6.14) 成立.

推论 6.6.3 在定理 6.6.3 条件下，任给可测函数 $h:\Omega\to X$，满足 $h(\omega)\in N(\omega,T)$ $(\forall\ \omega\in\Omega)$，存在 $m\in TS_M$，使得

$$h(\omega)=\int_c f(\omega,t)m(\omega,dt)$$

证明 依引理 6.6.1 存在 $V(\cdot,\cdot)\in TS_M$，使得

$$V(\omega,c)=h(\omega)\quad(\forall\ \omega\in\Omega)$$

于是由推论 6.6.2，存在 $m\in TS_M$，使得

$$V(\omega,B)=\int_B f(\omega,t)m(\omega,dt)\quad(\forall\ B\in\mathbf{B}(T))$$

故知 $h(\omega)=\int_T f(\omega,t)m(\omega,dt)$.

最后我们研究参数在拓扑空间上变化的集值转移测度. 设 Y,Z 为两个可分的度量空间，称实值转移测度 $m:Y\times\mathbf{B}(Z)\to R$ 具有 Feller 性质，若任给有界连续函数 $f:Z\to R$

$$y \to n(y) = \int_Z f(z)m(y,dz)$$

是连续的. 下面给出集值转移测度类似的性质. 假设:

(i) S 为一 Polish 空间, $\mu(\cdot)$ 为 $(S,\mathbf{B}(S))$ 上的 Radon 测度, $\mathbf{B}(S)_\mu$ 表示关于 μ 的完备化. (ii) T 为另一 Polish 空间, $\lambda(\cdot)$ 为 $(T,\mathbf{B}(T))$ 上的 Radon 测度.

定义 6.6.3 称集值转移测度 $M: S \times \mathbf{B}(T) \to \mathbf{P}_f(X)$ 为弱上半连续的(w. u. s. c.), 若任给 $C \in \mathbf{B}(T)$ 及弱开集 $U \subset X$ 有

$$M_c^+(U) = \{s \in S, M(s,C) \subset U\}$$

为 S 中开集.

定理 6.6.4 设 $M: S \times \mathbf{B}(T) \to \mathbf{P}_{fc}(X)$ 为弱上半连续集值转移测度, 且满足:

(1) 存在 $W: S \to \mathbf{P}_{wkc}(X)$, 使得 $M(S,A) \subset \lambda(A) \cdot W(s)(s \in S, A \in \mathbf{B}(T))$;

(2) 任给 $x^* \in X^*$, $\sigma(x^*, M(s,T))$ 关于 $s \in S$ 连续, 则任给有界连续函数 $f: T \to R$ 有

$$N(s,C) = \int_c f(t)M(s,dt) \qquad (6.6.15)$$

为弱紧凸弱上半连续集值转移测度.

证明 由定理 6.6.3 及推论 6.6.1 可知 $N(s,C)$ 为弱紧凸集值转移测度, 且任给 $x^* \in X^*$, 有

$$\sigma(x^*, N(s,C)) = \int_c f(t)\sigma(x^*, M(s,dt)) \qquad (6.6.16)$$

固定 $s \in S$，设 $\{s_n, n \geqslant 1\} \subset S, s_n \to s(n \to \infty)$. 对于任意闭集 $K \subset T$，由于 $M(\cdot, K)$ 是弱上半连续的，故依定理 1.6.13 我们可以知道 $\sigma(x^*, M(\cdot, K))$ 是上半连续的，即

$$\limsup_{n \to \infty} \sigma(x^*, M(s_n, K)) \leqslant \sigma(x^*, M(s, K)) \tag{6.6.17}$$

而由已知条件(2)，有

$$\lim_n \sigma(x^*, M(s_n, T)) = \sigma(x^*, M(s, T)) \tag{6.6.18}$$

因此 $(T, \mathbf{B}(T))$ 上实值测度列 $\{\sigma(x^*, M(s_n, \cdot)), n \geqslant 1\}$ 弱收敛到 $\sigma(x^*, M(s, \cdot))$. 依度量空间是测度弱收敛的定义知

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} \sigma(x^*, M(s_n, C)) &= \lim_{n \to \infty} \int_C f(t) \sigma(x^*, M(s_n, dt)) \\ &= \int_C f(t) \sigma(x^*, M(s, dt)) \\ &= \sigma(x^*, N(s, C))\end{aligned} \tag{6.6.19}$$

由定理 1.6.13 及(6.6.19) 即知 $N(s, C)$ 是弱上半连续的.

[注] 当 X 是有限维时由定理证明中(6.6.19) 易知 $N(\cdot, C)$ 在 Hausdorff 距离意义下连续.

参 考 文 献

〔1〕Artstein, Z. (1972), Set-Valued measures, Trans. Amer. Math., Soc., 165, 103—125.

〔2〕Artstein, Z. and Vitale, R. A. (1975), A strong law of Random sets.

〔3〕Artstein, Z. (1975), Weak convergence of set-valued functions and control, SIAM. J. Control, 13, 865—878.

〔4〕Artstein, Z. and Hart, S. (1981), Law of large numbers for random sets and allocation processes, Math. of Oper. Research, 6, 482—492.

〔5〕Artstein, Z. and Hansen, J. C(1985), Convexification in limit laws of random sets in Banach spaces, Ann. Prob., 13, 307—309.

〔6〕Arstein, Z. and Prikry, K. (1987), Caratheodory selection and the Scorza Dragono property, J. Math. Anal. Appl., 127, 540—547.

〔7〕Attouch, H., Lucchetti, R. and Wets, R., The topology of the ρ-Haursdorff distance, Ann. Mat. Pura. Appl. (to appear)

〔8〕Auman, R. (1965), Integrals of set valued functions, J. Math. Anal., 12, 1—12.

〔9〕Balder, E. J. (1988), Fatou's lemma in infinite dimensions, J. Math, Anal. Appl., 136, 450—465.

〔10〕Banks, H. T. and Jacobs, M. Q. (1970), A Differential calculus for

multifunctions, J. Math. Anal. Appl. , 29, 246—272.

〔11〕 Bagchi, S. (1985), On a. s. convergence of classes of multivalued asymptotic martingales, Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. , 21, No. 4, 313-- 321.

〔12〕 Beer, G. (1989), Convergence of continous linear functionals and their level sets, Arch. Math. , 52, 482—491.

〔13〕 Beer, G. (1991), A Polish topology for the closed subsets of a polishl, Proc. Amer. Math. Soc. 113, No. 4, 1123—1133.

〔14〕 Beer, G,and Diconcilio, A(1991), Uniform continuity on bounded sets and the Attouch-Wets topology, Proc. Amer. Math. Soc. , 112, No. 1, 235--243.

〔15〕 Beer, G. (1989), Support and distance functionals for convex sets, Numer, Funct. Anal. Optim. , 10.

〔16〕 Beer, G,and Borwein, J. M. (1990), Mosco convergence and reflexivity, Proc. Amer. Soc. , 109, No. 2, 427—436.

〔17〕 Beer, G. (1988), On Mosco convergence of convex sets, Bull. Austrcl. Math. Soc. , 38, 239—253.

〔18〕 Blume, L. (1982), New techniques for the study of stochastic equlibrium processes, J. Math. Econom. , 9, 61—70.

〔19〕 Borwein, J. M. and Fitzpatrick, S. (1989), Mosco convergence and the kadec property, Proc. Amer. Math. Soc. , Vol. 106, No. 3, 843--851.

〔20〕 Byrne, C. L(1978), Remarks on the set-valued integrals of Debreu and Auman, J. Math. Anal. Appl. , 62, 243—246.

〔21〕 Castaing, C. and Valadier, M. (1977), Convex analysis and mea-

surable multifunctions, Lecture Notes in Math., 580, Springer Verlag, New York, Berlin.

〔22〕 Coste, A. (1980), Sur les martingales multivogues, C. R. Acad, Sci., Paris, 290, 953—956.

〔23〕 Coste, A. (1975), La propriete de Radon-Nikodym en integration multivoque, C. R. Acad. Sci. Paris Ser., 280, 1515—1518.

〔24〕 Choukairi-Dini, A. (1990), M-Convergence, et regularitedes martingales multivoques: Epi-martingales, J. multi. Anal., 33, 49—71.

〔25〕 Cressie, N. (1978), A strong limit theorem for random sets. Adv, Appl. Prob. Suppl., 10, 36—46.

〔26〕 Cressie, N. (1979), A central limit theorem for random sets, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 49, 37—47.

〔27〕 Daures, J. P. (1973), Version multivoque du theorem de doob, Ann. Inst. H. Poincare, 9, No. 2, 167—176.

〔28〕 Debreu, G. (1966), Integration of correspondences, In Proceedings 5th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob., 351—372 Univ. of California Press, Berkeley.

〔29〕 Diestel, J. and Uhl, J. J., Jr. (1977), Vector measures, Math. Surveys, 15, Amer. Math. Soc.

〔30〕 Diestel, J. (1984), Sequences and series in Banach space, Graduate Texts in Math., 92, Springer-Verlag, New York Heidelborg Berlin.

〔31〕 Dam, B. K. and Tien, N. D. (1981), On the multivalued asymptotic martingales, ACTA Math. vietnamica, Tom6, No. 1, 77-

87.

〔32〕 Effros, E. (1965), Convergence of closed subsets in a topological space; Proc. Amer. Math. Soc., 16, 929—931.

〔33〕 Egghe, L. (1984), Stopping times techniques in analysis, Uni. Antwerpen, Cambrige Univ. Press, Cambridge.

〔34〕 Fell, J. (1962), A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space, Proc. Amer. Math. Soc., 13, 472—476.

〔35〕 Francaviglia, S., Lechicki, A. and Levi, S. (1985), Quasi-uniformization of hyperspaces and convergence of nets of semicontinuous multifunctions, J. Math. Anal. Appl., 112, 347—370.

〔36〕 Gine, F. and Hahn, M. G. (1986), Characterization and domains of p-stable random compact sets, Ann. Prob. Vol. 1, No. 2, 447—468.

〔37〕 Gine, E, and Hahn, J. and Zinn (1983), Limit theorems for random sets: An application of probability in Banach space results, Lecture Notes in Math., 990, Springer, Berlin, 112—135.

〔38〕 Godet-Thobie, C. (1980), Some results about multimeasures and their selectors, In: Measurable theory-Oberwolfach, 1979, Lecture Notes in Math., 794, Springer, Berlin.

〔39〕 Hansell, R. W. (1987), Extended Bochner measurable selectors, Math. Ann., 277, 79—94.

〔40〕 Hess, C. (1991), Convergence of conditional expectations for unbounded random sets, integrands, and integral functionals, Math. Oper. Research, 16, 627—649.

〔41〕 Hess, C. (1990), Measurability and integrability of the weak upper limit of a sequence of multifunctions, J. Math. Anal. Appl., 153, No. 1, 226—249.

〔42〕 Hess, C. (1991), On multivalued martingales whose values may be unbounded: martingale selections and mosco convergence, J. Mmliti. Anal., 39, 175—201.

〔43〕 Hiai, F. and Umegaki, H. (1977), Integrals, conditional expectations and martingalas of multivalued functions, J. Multi. Anal., 7, 142—182.

〔44〕 Hiai, F. (1978), Radon-Nikodym theorems for set-valued measures, J. Multi. Anal., 8, 96—118.

〔45〕 Hiai, F. (1985), Convergence of conditional expectations and strong laws of large numbers for multivalued random variables, Trans. Amer. Math. Soc., 291, 613—627.

〔46〕 Himmelberg, C. J. (1975), Measurable relations, Fund. Math., 87, 53—72.

〔47〕 Himmelberg, C. J., Parthasarathy, T. and Van Vleek, F. S. (1981), On measurable relations, Fund. Math. 111, 161—167.

〔48〕 Kelley, J. 1. (1955), General Topology, Graduate Texts in Math., 27, Springer-Verlag.

〔49〕 Kendall, D. G. (1973), Foundations of a theory of random sets, In Stoc. Geom. John Wiley Sons.

〔50〕 Kim, T., Prikry, K. and Yannelis, N. C. (1987), Caratheodory-type selections and random fixed point theorems, J. Math. Anal. Appl., 122, 393—407.

〔51〕 Koruin, A. and Kleyle, R. M. (1989), Goal uncertainty and the supermartingale property in an information feedback loop. Stoc. Anal. Appl., 7, 291—307.

〔52〕 Klein, E. and Thompson, A. (1984), Theory of Correspondences, Wiley, New York.

〔53〕 Klei, H A. (1983), Le theorems de Radon Nikodympour des multimesures a valeurs Faiblement compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, 297, 643—646.

〔54〕 Kuratowski, K. (1966), Topology Vol. I, Transl. J. Jaworowski, Academic Press, New York.

〔55〕 Lucchetti, R. (1987), Convergence and approximation results for measurable multifunction Proc. Amer. Soc., Vol. 100, No. 3, 551—556.

〔56〕 Ledonx, M. and Talagrand, M. (1991), Probability in Banach spaces, Springer-Verlag.

〔57〕 Luu, D. Q. (1982), Multivalued quasi-martingales and unifrom amarts, Acta. Math. Vietnam., 7, No. 2, 3—25.

〔58〕 Luu, D. Q. (1984), Applications of set-valued Radon-Nikodym theorems to convergence of multivalued $L^{\prime}$-amarts., Math. Scard., 54, 101—113.

〔59〕 Luu, D. Q. (1981), Representaions and regularity of multivalued martingales, 6, No., 2, 29—40.

〔60〕 Luu, D. Q. (1981), On the multivalued asymptotic martingales, ACTA Math. Vietnamica, 6, No. 1, 77—87.

〔61〕 Lyashenko, N. N. (1982), Limit theorems for sums of independent

computer random subset of Euclidean space L, Soviet Math., 20, 2187—2196.

〔62〕 Lyashenko, N. N. (1983), Statistics of random compacts in Euclidean space. J. Soviet Math., 21, 76—92.

〔63〕 Michael, E. (1951), On the continuity of the Young-Fenchel transform, J. Math. Anal. Appl., 35, 518—535.

〔64〕 Mosco, V. (1969), Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. Adv. in Math., 3, 510—585.

〔65〕 Mosco, U. (1971), On the contimuity of the Young transform, J. Math. Anal. Appl., 35, 518—535.

〔66〕 Mrowka, S. (1958), On the convergence of nets of sets, Fund. Math., 45, 237—246.

〔67〕 Mase, S. (1979), Random compact convex sets which are infinitely divisible with respect to Minkowski addition, Adv. Appl. Prob., 11, 834—850.

〔68〕 Matheron, G. (1975), Random Sets and integral geometry, John Wiley Sons, New York.

〔69〕 Neveu, J. (1975), Discrete-parameter martingales. North-Holland, New York.

〔70〕 Neveu, J. (1972), Convergence presque sure des martingales multivoques, Ann. Inst. Henri Poincare, 8, 1—7.

〔71〕 Papageorgiou, N. S. (1985), On the theory of Banach space valued multifunctions, Part 1: Integration and conditional expectation, J. Multi. Anal., 17, 185—206.

〔72〕 Papageorgiou, N. S. (1985), On the theory of Banach space valued

muluec multifunctions, Part:set valued martingales and set valued measures, J. Multi. Anal., 17, 207—227.

〔73〕 Papageorgiou, N.S. (1987), A convergence theorem for set valued supermartingales with values in a separable Banach space, stoc. Anal. Appl., 5, 510—520.

〔74〕 Papageorgiou, N.S. (1986), On the efficiency and optimality ofallocations, SIAM. J. Control. Optim., 24, 452—479.

〔75〕 Papageorgiou, N.S. (1987), A relaxtion theorem for differential inclusions in Banach spaces, Tohoku Math. J., 39, 505—517.

〔76〕 Papageorgiou, N.S. (1987), Convergence theorems for Banach space valued integrable multifunctions, Intern, J. Math and Math. Sci., 10, 433—442.

〔77〕 Papageorgiou, N.S. (1989), Convergence and representation theorems for set valued random processes, Stoc. Anal. Appl., 7, 187—210.

〔78〕 Papageorgiou, N.S. (1986), The integral theory of Ioffe's fans. J. Math. Anal. Appl., 113, No. 2, 554—561.

〔79〕 N.S. Papageorgiou, N.S. and Kandilakis, D. A. (1987), Convmgellcoill approllnnrion and nonsmooth unulyvis, appro. theo., 49, No. 1, 41—54.

〔80〕 Papageorgiou, N.S. (1986), Integral functionals on souslin locally convex spaces, J. Math. Anal. Appl., Vol. 173, No. 1, 148—162.

〔81〕 Papageorgiou, N. S. (1987), Contributions to the theory of set valued functions and set valued measures, Tran Amer. Math.

Soc., 304, No. 1, 245—265.

[82] Papageorgiou, N. S. (1989), Properties of the relaxed trajectories of evolution equations and optional control SIAM. J. Contr and opti, 27, No. 2, 267—288.

[83] Papageorgiou, N. S. (1989) Measurable multifunctions and their applications to convex integral functionals, Internet. J. Math. and Math Sci, 12, 175—192.

[84] Papageorgiou, N. S. (1989), Differential inclusions with state constraints, Proce. Edinburgh Math. Soc., 32, 81—98.

[85] Papageorgion, N. S. (1988), Decomposable sets in the Lebesgue-Bochner space, Comm. Math. Univ. Sancti. Paul. 37, No. 1, 49—62.

[86] Papageorgiou, N. S. (1989), Existence of best approximations in spaces of random sets, Comm. Math. Univ. Sancti. Pauli, 38, No. 1, 1—10.

[87] Papageorgiou, N. S. (1990), Radon-Nikodym theorems for multimeasures and transition multimeasures, Proc. Amer. Math. Soc., 111, No. 2, 465—475.

[88] Puri, M. L. and Ralescu, D. A. (1983), Strong law of large numbers with respect to a set valued probability measure, Annl. Prob., 11, No. 4.

[89] Rao, K. M. (1969), Quasi-martigales. Math. Scard. 24, 79—92.

[90] Rockafellar, R. T. (1976), Integral-functions, normal integrands, and measurable selections. In Nonlinear Operators and Calculus of variations. Lecture Notes in Math., 543, Springer-Verlag, Berlin.

〔91〕 Rockafellar, R. T. (1969), Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. , J. Math. Anal. Appl. ,2.

〔92〕 Rockafellar, R. T. and Wets, R. (1984), Variational systems, an introduction. In: Multifunction and integrands, Lecture Notes in Math. 1091, Berlin-Heidelberg-New York.

〔93〕 Rochafellar, R. T. (1970), Convex analysis, Princeton Univ. Press.

〔94〕 Saint-Beuve, M. F. (1978), Some topological properties of vector measures with bounded variations-and its application, Ann. Mat. Pura. Appl. CXVI, 317—379.

〔95〕 Salinetti, G. and Wets, R. (1986), On the Convergence in distribution of measurable multifunction (random set), normal integrand, stochasic process and stochastic infima, Math. Oper. Research, 11, No. 3, 385—419.

〔96〕 Salinetti, R. and Wets, R. (1981), On the convergence of closed-valued measurable multifunctions, Trans. Amer. Malb., 300, 275—283.

〔97〕 Salinetti, R. and Wets, R. (1977), On the relation between two types of convence for convex functions, J. Math. Anal. Appl., 60, 211—226.

〔98〕 Salinetti, R. and Wets, R. (1979), On the convergence of sequences of convex sets infinite dimensions, SIAM Review, 21, 18—33.

〔99〕 Scalora, F. S. (1961), A Astract martingale convergence theorems. Pacific J. Math., 11, 347—374.

〔100〕Schmidt, K. D. (1983), On Radstroms embedding theorem, In: Methods of Operations research, 46, Konigstein, Athenaum, 335--338.

〔101〕 Uhl, J. J. and JR. (1969), Spplications of radon-Nikodym theorems to martingale convergence, Tran. Amer. Math. Soc., 145, 271—285.

〔102〕 Uhl. J. J. and JR. (1969), The range of a vector-valued measure, Proc. Amer. Math. Soc., 23.

〔103〕 Umegaki, H. and Bharucha-Reid, A. T. (1970), Banach space-valued ranom variables and tensor products of Banach spaces., J. Math. Appl., 31, 49—67.

〔104〕 Valadier, M. (1981), On conditional expectation of random sets, Ann. Mat. pura. Appl., 81—91.

〔105〕 Van Cutsem, B. (1969), Martingales de multiapplications a valeurs convexes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, 269, 429—432.

〔106〕 Van Cutsem, B. (1971), Martingales de convexes fermers aleatoires en dimension finie, Ann. Inst. H. Poincare B., 8, No. 4, 365—385.

〔107〕 Wagner, D. H. (1977), Survey of measurable selection theorems, SIAM J. Control and Opt., 15, 859—903.

〔108〕 Wagner, D. H. (1980), Survey of measurable selection theorems: an update. In: Measurable theory-Oberwolfach 1979, Lecture Notes in Math., 794, Springer, Berlin.

〔109〕 Wets, R. (1980), Convergence of convex functions, variational

inequalities and convex optimization problems. In Variational inequalities and Complementary Problems. Wiley. Chichester, UK.

〔110〕 Wijsman, R. A. (1964), Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. Bull Amer. Math. Soc., 70, 186—188.

〔111〕 Wijsman, R. A. (1966), Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, Trans, Amer, Math. Soc., 123, 32—45.

〔112〕 Yannelis, N. C. (1988), Fatou's lemma in infinite-dimensional space, Proc. Amer. Math. Soc., 102, No. 2, 303—310.

〔113〕 Yannelis, N. C. (1989), Weak sequential convergence in $L_p L(\mu, X)$, J. Math. Anal. Appl., 141, 72—83.

〔114〕 王梓坤(1965),随机过程论,科学出版社.

〔115〕 王梓坤(1991),超过程的若干新进展,数学进展,20,No. 3,311—325.

〔116〕 严士健(1989),无穷粒子马尔可夫过程引论,北京师范大学出版社.

〔117〕 吴智泉、王向忱(1990),巴氏空间上的概率论,吉林大学出版社.

〔118〕 何声武(1989),随机过程导论,华东师范大学出版社.

〔119〕 钱敏平(1990),随机过程引论,北京大学出版社.

〔120〕 胡迪鹤(1986),随机过程概论,武汉大学出版社.

〔121〕 汪嘉冈(1988),现代概论基础,复旦大学出版社.

〔122〕 严加安(1988),测度与积分,陕西师范大学出版社.

〔123〕 严加安(1981),鞅与随机积分引论,上海科学技术出版社.

〔124〕 龙瑞麟(1985),HP 鞅论,北京大学出版社.

〔125〕定光桂(1984),巴拿赫空间引论,科学出版社.

〔126〕余鑫泰(1986),Banach 空间几何理论,华东师范大学出版社.

〔127〕史树中(1990),凸分析,上海科学技术出版社.

〔128〕张文修(1989),集值测度与随机集,西安交通大学出版社.

〔129〕张文修、王国俊、刘旺金、方锦暄(1991),模糊数学引论,西安交通大学出版社.

〔130〕张文修、李腾(1988),集值测度的表示定理,数学学报,No. 2, 201—208.

〔131〕张文修、高勇(1992),集值上鞅收敛定理与 Riesz 分解,数学学报 No. 1,112—120.

〔132〕聂赞坎、张文修(1992),集值上(下)鞅的 Doob 分解,数学学报, No. 1,53—62.

〔133〕高勇、张文修(1992),关于集值 Pramart 的某些结果,应用概率统计,Vol. 9. No. 2.

〔134〕张文修、马计丰、李爱洁(1992),The extension of a compact set valued measure., J. Math. Reseach and exposition, 110, No. 1, 35—43.

〔135〕李华贵、张文修(1987),Convergence theorem for the sequence of random sets with respect to the topology, Science Bulletin. Vol. 33, No. 5, 360—363.

〔136〕张文修、聂赞坎、高勇(1991),集值随机过程——一般理论与集值鞅,工程数学学报,No. 3, 1—21.

〔137〕王灏、张文修(1991),集值条件期望不等式及其应用,工程数学学报,No. 3, 29—35.

〔138〕戴宁、张文修(1991),集值随机过程的可分性与可测性,工程数

学学报

〔139〕张文修、马计丰　　　　　　　　Lebesgue 分解定理，数理统计与应用概率，4，

〔140〕乐惠玲、张文修(1984)，R^n 中的随机闭集与随机闭凸集的充要条件，西安交通大学学报，18，No. 2，1—10.

〔141〕李腾、张文修(1985)，关于集值测度的 Radon-Nikodlm 导数，西安交通大学学报，23，No. 1.

〔142〕汪振鹏(1991)，集值 Supermartingale 的一个收敛定理，科学通报，No. 10，724—727.

〔143〕李世楷(1987)，集值映射积分的收敛性，科学通报，No. 6.